

UNTERSUCHUNGEN ZUR L_{∞} -STABILITÄT
FÜR EINE KLASSE NICHTLINEARER
REGELUNGSSYSTEME

DIPLOMARBEIT 1982

JOACHIM BÖCKER

INSTITUT FÜR REGELUNGSTECHNIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

D-1000 BERLIN
F. R. Germany

Einleitung

Bei der Modellbildung von Systemen und dem Entwurf von Reglern tritt oftmals die Frage auf: In welchem Bereich bewegen sich die Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems, wie weit werden sie angesteuert?

Das Wissen um dieses Verhalten ist häufig zwingend: Wird der bei der Modellbildung angenommene „Aussteuerungsbereich“ eingehalten oder werden die physikalischen Grenzen (z.B. Druck und Temperatur in einem Kessel, Spannungen, Ströme und Leistungen bei elektrischen Maschinen) erreicht? Ebenso tritt die umgekehrte Frage auf: Bis zu welcher Belastung müssen die technischen Einrichtungen ausgelegt werden, damit die durch das vorgegebene Systemverhalten bedingten Spitzenwerte aufgefangen werden?

Aber auch dann, wenn es sich nicht um Probleme physikalischer Grenzwerte handelt, ist die Kenntnis der Aussteuerungsbereiche der Eingangs- und Ausgangsgrößen von Vorteil.

Bei linearen, zeitinvarianten Systemen sind diese Probleme sofort vollständig beantwortbar. In vielen Fällen wird aber auch hierbei nur eine näherungsweise Beurteilung mit den Methoden der Frequenzkennlinien durchgeführt.

Bei nichtlinearen, zeitvarianten Systemen ist nun die explizite Bestimmung des Systemverhaltens (mit Ausnahme der Rechnersimulation) meist völlig aussichtslos. Es bleibt die Möglichkeit einer Abschätzung. Das mathematische Rüstzeug dazu finden wir in Methoden der Funktionalanalysis.

Zusammenfassung

Im 1. Kapitel wird zunächst der zu untersuchende „nichtlineare Standardregelkreis“ definiert; das Gesamtsystem muß sich in ein lineares, zeitinvariantes Teilsystem und in ein nichtlineares, zeitvariantes aufspalten lassen um die Ergebnisse dieser Arbeit anwenden zu können. Die beiden Teilsysteme werden dabei nur durch ihr Eingangs-Ausgangs-Verhalten beschrieben (Übertragungsverhalten). Weiter wird dann die Stabilität (Eingangs-Ausgangs-Stabilität) des vorgelegten Systems in allgemeinen Banachräumen untersucht.

Die Banachräume werden im 2. Kapitel auf die Räume L_p^a eingeschränkt. L_p^a ist der Raum der mit der Gewichtung e^{at} in der p -ten Potenz integrierbaren Funktionen. Von diesen Räumen wird ausgiebig Gebrauch gemacht. Die Norm des Raumes L_∞ liefert eine mathematisch besser zu handhabende Größe als der Begriff der „Aussteuerung“, wodurch dann auch der Begriff der L_∞ -Stabilität entsteht.

Das 3. Kapitel stellt nun zwei alternative Methoden vor zu einer Aussage über die L_∞ -Stabilität zu gelangen. Der erste Weg (Abschnitt 3.1) arbeitet vollständig im Raum L_∞ und wendet ein im 1. Kapitel für allgemeine Banachräume aufgestelltes Stabilitätskriterium an. Einige Beispiele, bei denen die auf diesem Wege erhaltenen Abschätzungen mit Rechnersimulationen verglichen werden, verdeutlichen die Güte der Ergebnisse.

Die zweite Alternative (Abschnitt 3.2) wendet den allgemeinen Stabilitätssatz aus Kapitel 1 zunächst im Raum L_2^a an, wodurch das bekannte „Kreiskriterium“ entsteht. Es wird nachgewiesen, daß dann auch L_∞ -Stabilität vorliegt. Ein dabei auftretendes Integral wird durch ein leistungsfähiges Rechenschema rekursiv gelöst.

Inhaltsverzeichnis

	Seite	
1.1	Der vorgelegte Regelkreis	5
1.2	Transformation auf den Standardregelkreis	9
1.3	Die theoretischen Grundlagen	12
2.	Die Räume L_p^a	23
2.1	L_∞ -Normen linearer, zeitinvarianter Übertragungssysteme	25
2.1.1	L_∞ -Normen von Systemen 2. Ordnung	29
2.2	L_2^a -Normen linearer, zeitinvarianter Übertragungssysteme	38
2.2.1	L_2 -Normen von Systemen 2. Ordnung	39
3.	Stabilitätskriterien für die L_∞ -Stabilität	43
3.1	Stabilität direkt im Raum L_∞	46
3.1.1	System 2. Ordnung mit Totzeit	51
3.1.2	Kupplungsstangenantrieb	53
3.1.3	Kursregelung bei Schiffen	57
3.2	L_∞ -Stabilität begründet durch die L_2^a -Stabilität	65
3.2.1	Stabilität im Raum L_2^a	66
3.2.2	Integral des Betragsquadrats der Übertragungsfunktion	70
3.2.3	Herleitung der L_∞ -Stabilität	81
3.2.4	Beispiele	85
	Verzeichnis einiger wichtiger Symbole	89
	Literaturverzeichnis	91

1.1 Der vorgelegte Regelkreis

Diese Arbeit behandelt aus der Fülle der möglichen nichtlinearen, zeitinvarianten Systeme nur eine spezielle Klasse von Regelkreisen. Zum einen soll es sich um Eingrößensysteme handeln (die Übertragung auf Mehrgrößensysteme scheint jedoch möglich), zum anderen soll sich das System in zwei Teilstrukturen aufspalten lassen, wobei der eine Teil ein lineares, zeitinvariantes System und der andere ein nichtlineares, zeitvariantes System sein darf (nichtlinearer Standardregelkreis).

Die beiden Teilsysteme sind dabei über folgende Struktur verknüpft:

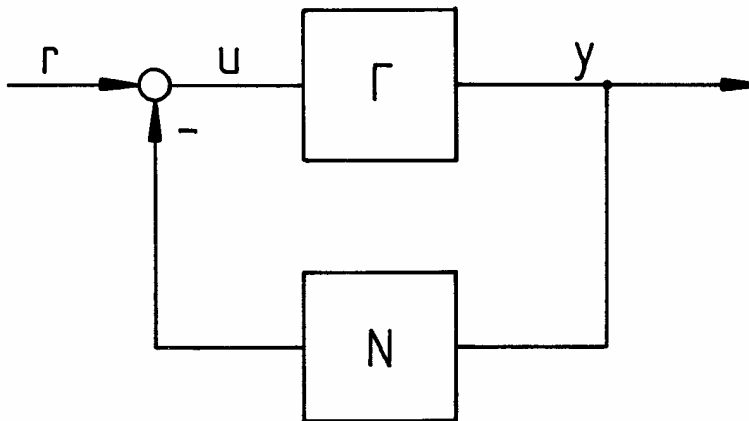


Bild 1

$$\text{Es gilt } y = \Gamma u \quad (1.1)$$

$$\text{und } u = r - N y \quad . \quad (1.2)$$

Die Eingangsgröße des Gesamtsystems ist r , die Ausgangsgröße ist y .

Γ ist das lineare, zeitinvariante Teilsystem, N das nicht-lineare, zeitvariante.

Die allgemein komplexwertigen Zeitfunktionen r, u, y seien dabei Elemente eines Banachraumes B . Die Systemoperatoren Γ und N sind demnach Operatoren auf B .

Der lineare, zeitinvarinate Operator Γ soll nun durch eine „Gewichtsfunktion“ g beschrieben werden:

$$y = g * u \quad . \quad (1.3)$$

Das Symbol $*$ kennzeichnet das Faltungsintegral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad . \quad (1.4)$$

Da wir nur ein physikalisch sinnvolles System betrachten wollen, müssen Γ und N kausal sein. Deshalb ist $g(t) = 0$ für $t < 0$. Weiter schließen wir auch alle „sprungfähigen“ Systeme Γ aus (vergleiche die genauere Formulierung (1.46)).

Im Bildbereich der Laplacetransformation wird (1.3) zu dem einfachen Produkt

$$Y = G \cdot U \quad . \quad (1.5)$$

Die Laplacetransformierten werden hier und im folgenden durch die entsprechenden Großbuchstaben der mit kleinen Buchstaben benannten Zeitfunktionen bezeichnet. Wir wollen stets die zweiseitige Laplacetransformation (Symbol: \mathcal{L}) anwenden, um auch Zeitfunktionen berücksichtigen zu können, die für negative t nicht verschwinden. Zur Laplacetransformation siehe z.B. [F1].

Die Existenz der Laplacetransformierten sei hier zunächst vorausgesetzt.

Der nichtlineare, zeitvariante Operator N soll nun so beschaffen sein, daß er eine Schranke $v \in \mathbb{R}_0^+$ besitzt:

$$|N| \leq v \quad . \quad (1.6)$$

Beschränkte Operatoren werden in der Definition 1.3 erläutert. Möglich ist auch, daß der Operator N die „Sektorbedingung“

$$|(Ny)(t)| \leq v |y(t)| \quad (1.7)$$

für alle y erfüllt. Derartige Nichtlinearitäten sind unter der Bezeichnung „Sektorfunktionen“ bekannt. Meistens wird in der Literatur an die Nichtlinearität N diese Sektorbedingung gestellt. Die Bedingung (1.7) impliziert (1.6); (1.7) ist also eine schärfere Forderung.

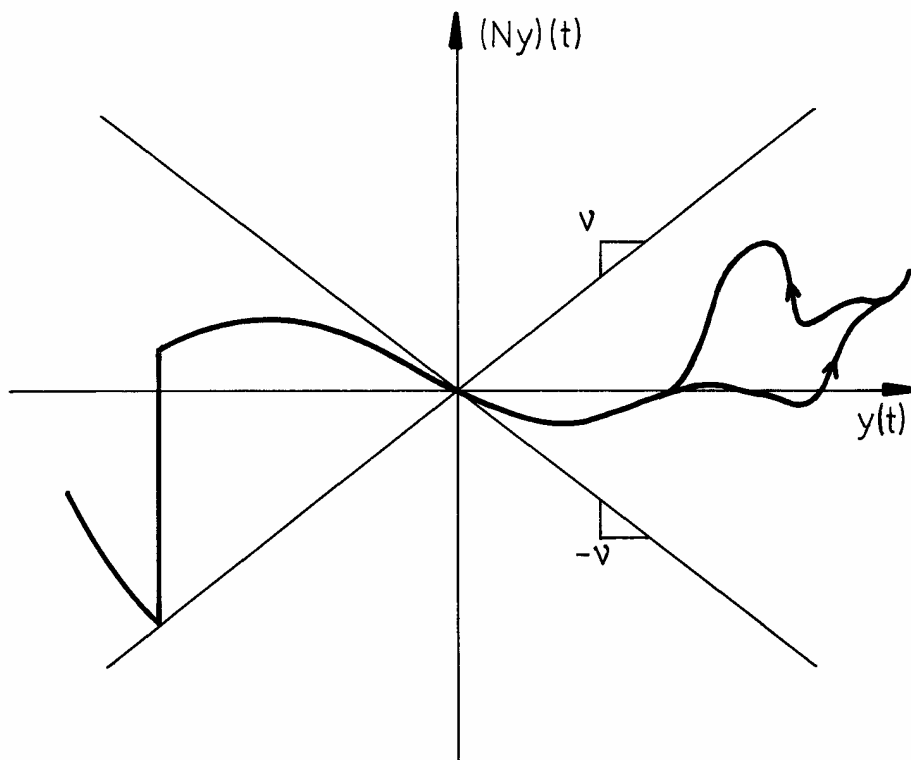


Bild 2: Beispiel einer Nichtlinearität nach (1.7) (reelle Darstellung)

Das vorgelegte System wird nur durch sein Übertragungsverhalten bestimmt; die Operatoren Γ und N bilden die Eingangsfunktionen direkt auf die Ausgangsfunktionen ab. Durch welche interne Struktur dieses Übertragungsverhalten zustande kommt, wird nicht untersucht. Es wird sogar bewußt vermieden, sich etwa auf ein endlichdimensionales Differentialgleichungssystem (Zustandsmodell) festzulegen, welches das Übertragungsverhalten verursacht. Auf diese Weise bleiben die Ergebnisse viel allgemeiner anwendbar. Z.B. können dann auch Systeme mit verteilten Parametern untersucht werden, wenn die Eingangs- und Ausgangsgröße an konzentrierten Punkten wirken.

Wie oben erwähnt, sollen die Übertragungsgleichungen (1.1) und (1.2) von vornherein komplex aufgefaßt werden. Der Aufwand gegenüber einer rein reellen Betrachtung erhöht sich praktisch nicht. Die Bedeutung komplexer Übertragungssysteme ist jedoch nicht nur theoretischer Art. Es lassen sich in manchen Fällen zwei reelle Größen vorteilhaft zu einer einzigen komplexen zusammenfassen. Dies wird beispielsweise bei der theoretischen Behandlung elektrischer Maschinen angewendet, wobei jeweils zwei Ortskomponenten einer beschreibenden Größe als eine komplexe Zahl dargestellt werden. Der Aufwand zur Untersuchung eines Zweigrößensystems ist aber (zumindest in Bezug auf diese Arbeit) größer als der zur Untersuchung eines komplexen Eingrößensystems. Das bedeutet nun, daß durch die komplexe Zusammenfassung reeller Größen (sofern dies möglich ist) nicht nur Schreibarbeit gespart wird, sondern sich eventuell auch prinzipiell neue Einblicke gewinnen lassen.

1.2 Transformation auf den Standardregelkreis

Der nichtlineare Teil des Systems nach Bild 1 soll die Bedingung (1.6) erfüllen. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß auch Systeme, deren Nichtlinearitäten einer veränderten Bedingung (1.10) genügen, durch eine Transformation auf den ursprünglich vorgelegten Standardregelkreis überführt werden können.

Betrachten wir jetzt das System

$$y' = \Gamma' u' \quad , \quad (1.8)$$

$$u' = r' - N' y' \quad , \quad (1.9)$$

wobei anstelle von (1.6) mit $\mu \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{R}_0^+$ für alle y gilt:

$$|N' - \mu| \leq \nu \quad . \quad (1.10)$$

Definieren wir:

$$u := u' + \mu y' \quad (1.11)$$

$$r := r' \quad , \quad y := y' \quad (1.12)$$

$$\Gamma := (1 + \Gamma' \mu)^{-1} \Gamma' \quad (1.13)$$

$$N := N' - \mu \quad (1.14)$$

Damit formen wir (1.8), (1.9), (1.10) um und bringen sie auf die Form von (1.1), (1.2), (1.6):

$$(1.8) \quad \leftrightarrow$$

$$y' = \Gamma' (u - \mu y') \quad \leftrightarrow$$

$$y' = (1 + \Gamma' \mu)^{-1} \Gamma' u \quad \leftrightarrow$$

$$y = \Gamma u$$

$$(1.9) \quad \leftrightarrow$$

$$u - \mu y' = r' - N'y' \quad \leftrightarrow$$

$$u = r' - (N' - \mu)y' \quad \leftrightarrow$$

$$u = r - Ny$$

$$(1.10) \quad \leftrightarrow$$

$$|N' - \mu| = |N| \leq \nu$$

Der Nachweis einer solchen Transformation ist geführt, sofern nur Γ nach (1.13) existiert.

Deshalb gehen wir im folgenden stets von einem System mit einer Nichtlinearität nach (1.6) aus.

Bild 3 zeigt diese Transformation im Strukturbild.

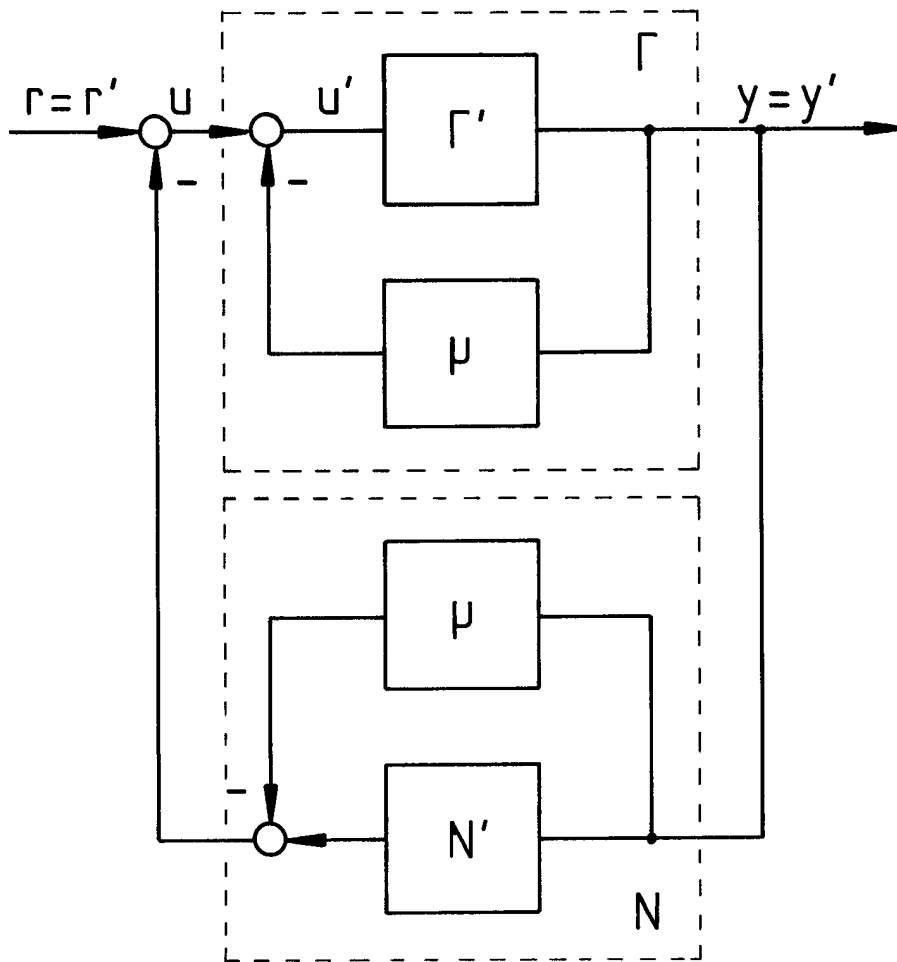


Bild 3

1.3 Die theoretischen Grundlagen

In diesem Abschnitt soll die Stabilität von Systemen möglichst allgemein untersucht werden. Dabei schränken wir die Funktionenräume nur auf allgemeine Banachräume ein, um die Anwendung in verschiedenen Räumen offenzuhalten.

Definition 1.1 (kontraktive Operatoren):

M sei ein metrischer Raum mit der Metrik ρ und T ein Operator auf M , also $Tx \in M$ für alle $x \in M$. T heißt kontraktiv auf M , wenn es eine Konstante $\alpha < 1$ gibt, so daß

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M. \quad (1.15)$$

Satz 1.2 (Banachscher Fixpunktsatz):

M sei ein vollständiger metrischer Raum und T ein kontraktiver Operator auf M . Dann hat die Gleichung

$$Tx = x \quad (1.16)$$

in M genau eine Lösung ξ (Fixpunkt des Operators). Weiterhin konvergiert das Iterationsverfahren

$$x_n = T x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.17)$$

mit einem beliebigen $x_0 \in M$ gegen die Lösung ξ . Dabei gilt die Fehlerabschätzung

$$\rho(x_n, \xi) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1). \quad (1.18)$$

Beweis:

Da T kontraktiv ist, gilt

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha \rho(x_{n-1}, x_n) .$$

Durch Rekursion gelangt man zu

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \quad .$$

Weiter gilt mit $n < m$ aufgrund der „Dreiecksungleichung“:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \leq \rho(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k \\ &= \rho(x_0, x_1) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \right) = \rho(x_0, x_1) \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} \\ \rightarrow \rho(x_n, x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Da $\alpha < 1$ ist, strebt $\rho(x_n, x_m)$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Damit ist $\{x_n\}$ Cauchyfolge und konvergent. Weil der Raum M vollständig ist, liegt der Grenzwert in M :

$$\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$$

Führen wir in der letzten Abschätzung den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ durch, so erhalten wir die Fehlerabschätzung (1.18):

$$\rho(x_n, \xi) \leq \rho(x_0, x_1) \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

Zu zeigen ist noch, daß ξ Lösung von (1.16) ist:

$$\begin{aligned} \rho(\xi, T\xi) &\leq \rho(x_n, \xi) + \rho(x_n, T\xi) = \rho(x_n, \xi) + \rho(Tx_{n-1}, T\xi) \\ \rightarrow \rho(\xi, T\xi) &\leq \rho(x_n, \xi) + \alpha \rho(x_{n-1}, \xi) \end{aligned}$$

Die beiden Terme der rechten Seite werden wegen (1.18) beliebig klein, daher kann die letzte Ungleichung nur gelten, wenn

$$\rho(\xi, T\xi) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \xi = T\xi \quad .$$

Vergleiche zu diesem Satz und Beweis [L1], S. 26ff.

Definition 1.3 (beschränkte Operatoren):

X und Y seien normierte Räume. T sei ein Operator von $D(T)$ (Definitionsbereich von T) in Y . Der Operator T heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$|Tx| \leq C |x| \quad \text{für alle } x \in D(T) . \quad (1.19)$$

Die kleinste Schranke C heißt Norm des Operators T und wird mit $|T|$ bezeichnet. Es ist

$$|T| = \sup_{x \in D(T)} \frac{|Tx|}{|x|} \quad (1.20)$$

und
$$|Tx| \leq |T| |x| . \quad (1.21)$$

Definition 1.4 (stabile Operatoren und Systeme):

Sei X ein normierter Raum, dessen Elemente Funktionen der Zeit sind. Ist T ein beschränkter Operator auf X so nennen wir T bzw. das durch T dargestellte System X -stabil.

Satz 1.5 (Stabilität linearer Regelungssysteme):

S sei ein linearer Operator auf einem Banachraum B mit

$$|S| \leq \alpha < 1 . \quad (1.22)$$

Dann hat die Operatorgleichung

$$u = r - Su \quad (1.23)$$

für jedes $r \in B$ genau eine Lösung, für die gilt:

$$|u| \leq \frac{1}{1-\alpha} |r| . \quad (1.24)$$

Beweis:

Definieren wir

$$Tu := r - Su \quad (1.25)$$

und schreiben damit (1.23) als

$$u = Tu \quad . \quad (1.26)$$

T ist kontraktiv, denn

$$\begin{aligned} \rho(Tx, Ty) &= |Tx - Ty| = |r - Sx - r + Sy| = |Sx - Sy| \\ &= |S(x - y)| \leq |S| |x - y| \leq \alpha |x - y| = \alpha \rho(x, y) \quad . \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2 hat damit (1.26) eine eindeutige Lösung und dann auch (1.23). Weiter folgt jetzt auch (1.24):

$$\begin{aligned} u = r - Su \quad \rightarrow \quad |u| &\leq |r| + |Su| \leq |r| + \alpha |u| \\ \rightarrow \quad (1 - \alpha) |u| &\leq |r| \quad \rightarrow \quad |u| \leq \frac{1}{1 - \alpha} |r| \quad . \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß die Existenz einer Lösung von (1.23) nicht durch die letzte Abschätzung gezeigt werden kann. Vielmehr setzt man die Existenz der Lösung bereits zur Herleitung der Abschätzung voraus; man kann sie daraus also nicht schließen.

Der letzte Satz setzt leider einen linearen Operator voraus. Das mit (1.1), (1.2) vorgelegte System ist jedoch nichtlinear. Es erscheint nun aber nicht mehr sehr schwierig, in Satz 1.5 auch nichtlineare Operatoren zuzulassen. Ein solcher Satz gilt nun aber gerade nicht! Dazu ein Gegenbeispiel:

B sei der Raum der reellen Zahlen \mathbb{R} . Wir untersuchen die Gleichung

$$u = r - f(u) \quad \leftrightarrow \quad r = u + f(u) \quad (1.27)$$

mit der Funktion f

$$f(u) := \begin{cases} 0 & \text{für } u \leq 1 \\ \frac{1}{2}u & \text{für } u > 1 \end{cases} \quad (1.28)$$

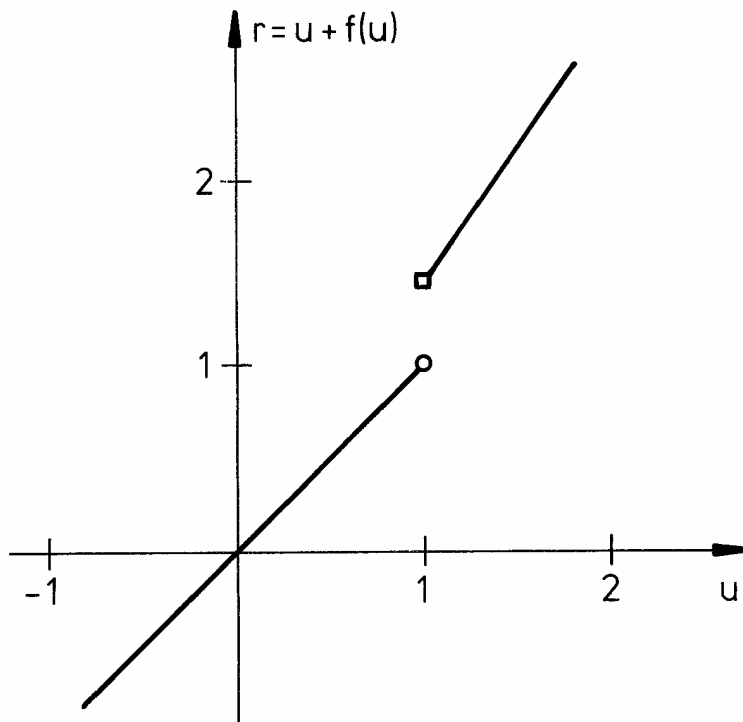


Bild 4

Obwohl $|f| = \frac{1}{2} < 1$, hat die Gleichung (1.27) für $1 < r \leq 1,5$ keine Lösung, wie man sofort in Bild 4 erkennt.

Bei nichtlinearen Operatoren und Systemen reicht also die Kenntnis einer Schranke $|S| \leq \alpha < 1$ keineswegs zur Sicherung der Existenz einer Lösung aus (und damit auch nicht für die Stabilität des Operators oder des Systems).

Hinreichend wäre es indessen, an einen nichtlinearen Operator direkt die Bedingung der Kontraktivität zu stellen. In der Literatur werden solche Nichtlinearitäten als „Lipschitzstetig“ oder als „inkremental beschränkt“ („incrementally conic“) bezeichnet. Bei diesen Nichtlinearitäten ist gleichzeitig die Stetigkeit des Gesamtsystems gesichert. Wir wollen aber hier keine solche verschärfende Bedingung einführen.

Um zu einem Ergebnis zu gelangen, gehen wir von allgemeinen nichtlinearen Operatoren ab und kehren zu dem eingangs vorgelegten System zurück.

Definieren wir jedoch zunächst den Projektionsoperator P_T :

$$(P_T f)(t) := \begin{cases} f(t) & \text{für } t \leq T \\ 0 & \text{für } t > T \end{cases} . \quad (1.29)$$

Die Bedingung der Kausalität von Γ und N können wir damit auch in der Form

$$P_T \Gamma u = P_T \Gamma P_T u \quad , \quad (1.30)$$

$$P_T N y = P_T N P_T y \quad \text{für alle } T \in \mathbb{R}, u, y \in B \quad (1.31)$$

schreiben.

Wir wollen nun zuerst die Existenz von Lösungen $u, y \in B$ der gegenüber (1.1), (1.2) veränderten Gleichungen

$$P_T y = P_T \Gamma P_T u \quad , \quad (1.32)$$

$$P_T u = P_T N P_T y + P_T r \quad (1.33)$$

nachweisen. Gelingt uns dies, ist die Frage der Existenz von Lösungen der ursprünglichen Gleichungen kein größeres Problem mehr.

Zum Nachweis der Existenz der Lösungen von (1.32), (1.33) reicht jedoch eine Schranke ähnlich (1.22) auch zusammen mit der Bedingung der Kausalität nicht aus. Z.B. kann man sich für N ein Kennlinienglied entsprechend (1.28) denken und setzt für Γ die Identität. Das System ist dann zwar kausal, doch existiert zu bestimmten Eingangsfunktionen r keine Lösung (auch nicht der veränderten Gleichungen (1.32), (1.33)).

Deshalb stellen wir an Γ statt der Kausalität eine noch schärfere Forderung: Es existiere ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so daß gilt

$$P_T Y = P_T \Gamma u = P_T \Gamma P_{T-\varepsilon} u \quad \text{für alle } T \in \mathbb{R}, u \in B. \quad (1.34)$$

Das bedeutet, daß die Ausgangsfunktion $y(T)$ nur von Werten der Eingangsfunktion $u(t)$ mit $t \leq T-\varepsilon$ abhängt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn für die Gewichtsfunktion gilt

$$g(t) = 0 \quad \text{für } t < \varepsilon. \quad (1.35)$$

Unter dieser einschränkenden Voraussetzung können wir die Existenz der Lösungen zuerst von (1.32), (1.33) zeigen: Für die Eingangsfunktion r nehmen wir zunächst an, daß sie unterhalb eines Wertes t_0 verschwindet:

$$r(t) = 0 \quad \text{für } t \leq t_0. \quad (1.36)$$

Dann ist für $T = t_0$ die Nullfunktion Lösung für u und y von (1.32), (1.33). Wir dürfen mithin annehmen, eine Lösung von (1.32), (1.33) sei für ein bestimmtes T bereits gesichert. Da die Bedingung (1.34) gelten soll, folgt damit auch eine Lösung y von

$$P_{T+\varepsilon} Y = P_{T+\varepsilon} \Gamma P_T u. \quad (1.37)$$

Hiermit wiederum erhalten wir dann auch eine Lösung u von

$$P_{T+\varepsilon} u = P_{T+\varepsilon} N P_{T+\varepsilon} Y + P_{T+\varepsilon} r. \quad (1.38)$$

Damit besitzen wir jetzt eine Lösung u, y von (1.32), (1.33) sogar für $T' = T+\varepsilon$. Da ε eine Zahl größer Null ist, können wir durch wiederholte Anwendung dieser beiden Schritte für jedes $T \in \mathbb{R}$ die Existenz der Lösungen von (1.32), (1.33) zeigen. Weiterhin ergibt sich auch die Eindeutigkeit.

Nun erst, da wir die Existenz von Lösungen u, y von (1.32), (1.33) für jedes $T \in \mathbb{R}$ begründet haben, dürfen wir die folgenden Schritte durchführen:

$$(1.32) \text{ und } (1.33) \quad \rightarrow$$

$$P_T u = P_T r - P_T N P_T \Gamma P_T u \quad \rightarrow$$

$$P_T u = P_T r - P_T N \Gamma P_T u \quad \rightarrow$$

$$|P_T u| \leq |P_T r| + |P_T N \Gamma| |P_T u| \quad \rightarrow$$

$$|P_T u| \leq |P_T| |r| + |P_T| |N \Gamma| |P_T u| \quad \rightarrow$$

Nun ist aber $|P_T| \leq 1$, so daß weiter folgt:

$$|P_T u| \leq |r| + |N \Gamma| |P_T u| \quad \rightarrow$$

$$(1 - |N \Gamma|) |P_T u| \leq |r|$$

Für $|N \Gamma| < 1$ erhalten wir:

$$|P_T u| \leq \frac{1}{1 - |N \Gamma|} |r| \quad .$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist unabhängig von T , so daß wir jetzt $T \rightarrow \infty$ streben lassen können und damit schließlich die Existenz der Lösungen von (1.1) und (1.2) gesichert haben. Ebensovienig geht t_0 ein; wir lassen $t_0 \rightarrow -\infty$ gehen.

Es gilt also:

$$|u| \leq \frac{1}{1 - |N \Gamma|} |r|$$

Ebenso ergibt sich für y :

$$|y| \leq \frac{|\Gamma|}{1 - |N \Gamma|} |r|$$

Als Bedingung trat $|N \Gamma| < 1$ auf. Diese Norm läßt sich weiter abschätzen:

$$|N\Gamma| \leq |N| |\Gamma| .$$

Gilt nun

$$|\Gamma| \leq \gamma , \quad |N| \leq \nu$$

mit $\gamma, \nu \in \mathbb{R}_0^+$, so ist mit

$$\alpha := \gamma\nu < 1$$

die Stabilität und Beschränktheit unseres Systems gesichert.

Fassen wir diese Ergebnisse im nachfolgenden Satz zusammen:

Satz 1.6 (Stabilität nichtlinearer Systeme):

Es liegen die Gleichungen (1.1), (1.2) vor. Γ und N seien Operatoren auf einem Banachraum. Der lineare, zeitinvariante Operator Γ werde durch eine Gewichtsfunktion g nach (1.3) beschrieben, für die gilt

$$g(t) = 0 \quad \text{für } t \leq \varepsilon , \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+ . \quad (1.39)$$

Weiter haben die Operatoren Γ und N Schranken,

$$|\Gamma| \leq \gamma , \quad \gamma \in \mathbb{R}_0^+ \quad (1.40)$$

$$\text{und} \quad |N| \leq \nu , \quad \nu \in \mathbb{R}_0^+ . \quad (1.41)$$

Gilt nun

$$\alpha := \gamma\nu < 1 , \quad (1.42)$$

so ist das System stabil im Sinne der Definition 1.4 und es gelten die Abschätzungen

$$\frac{|u|}{|r|} \leq \frac{1}{1-\alpha} , \quad (1.43)$$

$$\frac{|y|}{|r|} \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} . \quad (1.44)$$

Hiermit können wir dem Stabilitätssatz 1.5 für lineare Systeme auch einen Satz für nichtlineare Systeme gegenüberstellen. In beiden Sätzen muß die Existenz einer Schranke $\alpha < 1$ gesichert sein. Der Satz 1.6 benötigt aber gegenüber dem Satz 1.5 weitere Voraussetzungen; es tritt in Satz 1.6 die einschneidende Bedingung (1.39) auf. In der Tat dürfte nur eine geringe Anzahl von Systemen, die in der Regelungstechnik untersucht werden, diese Bedingung erfüllen (nämlich solche mit Totzeit). Von der praktischen Seite stellt sich dies jedoch kaum als Problem dar: Liegt ein System Γ mit einer Gewichtsfunktion g vor, welche die Bedingung (1.39) nicht erfüllt, so untersuchen wir zunächst ein verändertes System Γ_ε mit

$$g_\varepsilon(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \varepsilon \\ g(t) & \text{für } t > \varepsilon \end{cases}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+ . \quad (1.45)$$

Mit dem System Γ_ε läßt sich dann der Satz 1.6 anwenden. Gilt nun

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon = g \quad \rightarrow \quad (1.46)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Gamma_\varepsilon - \Gamma| = 0 \quad , \quad (1.47)$$

so kann ein gegebenes System Γ beliebig genau (im Sinne der Norm im Banachraum B) durch ein System Γ_ε angenähert werden, da ε beliebig klein gewählt werden darf. Geht man nun von der praktischen Anwendung aus und bedenkt, daß jede Modellbildung mit irgendwelchen Fehlern behaftet ist, befriedigt die Methode einer solchen Näherung vollauf.

Zu beachten ist aber, daß nicht für alle kausalen Systeme der Grenzübergang nach (1.46) gilt. Sogenannte „sprungfähige Systeme“, bei denen $g(0) = k\delta(0)$ mit der Diracschen Stoßfunktion δ gilt, erfüllen (1.46) gerade nicht. Tatsächlich lassen sich mit solchen sprungfähigen Systemen Gegenbeispiele

zu Satz 1.6 konstruieren (wie bei der Herleitung zu diesem Satz erwähnt).

Erfüllt nun ein System Γ statt (1.39) nur die Bedingung (1.46), so muß man also bei der Anwendung des Satzes 1.6 in der Praxis keine Bedenken hegen. In mathematischer Hinsicht ist dieses Vorgehen aber noch unbefriedigend. Die Schwierigkeiten beim streng mathematischen Vorgehen liegen nämlich darin begründet, daß aus dem Grenzverhalten des Systems Γ_ε nach (1.46) oder (1.47) keineswegs ein solches Verhalten für das Gesamtsystem folgen muß, da die Nichtlinearität N unstetig sein kann.

Ich bin jedoch davon überzeugt, daß Satz 1.6 auch dann noch gilt, wenn man (1.39) durch die abgeschwächte Bedingung (1.46) ersetzt. Leider ist es mir bisher nicht gelungen, einen schlüssigen Beweis anzugeben.

Vermutung 1.7:

Die Aussagen des Satzes 1.6 sind auch dann noch richtig, wenn man die Bedingung (1.39) durch (1.46) ersetzt.

Auch wenn die Vermutung 1.7 entgegen meiner Überzeugung nicht richtig sein sollte, sind die weiteren Ergebnisse der Arbeit, die durchweg darauf aufbauen, nicht gefährdet, da man sich dann mit der obigen Erläuterung des Satzes 1.6 in der praktischen Anwendung behelfen kann. Außerdem ist es ausreichend, die Vermutung 1.7 nur in den Räumen L_∞ und L_2^a zu beweisen, da später nur diese Räume verwendet werden.

Die hier aufgetretenen Schwierigkeiten beim Nachweis der Stabilität nichtlinearer Systeme werden oft dadurch vermieden, indem an das nichtlineare Teilsystem zusätzlich die Bedingung der Stetigkeit [W1] oder der Lipschitz-Stetigkeit [H2] gestellt wird.

2. Die Räume L_p^a

Im 1. Kapitel wurde der Raum, in dem wir die Übertragungsgleichungen (1.1), (1.2) betrachten wollen, nur auf einen Banachraum eingeschränkt. In diesem Kapitel soll nun eine Beschränkung auf die Räume L_p^a vorgenommen werden.

Der Raum

$$L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}, e^{at}) \quad , \quad a, p \in \mathbb{R}, \quad p \geq 1 \quad (2.1)$$

sei der Raum der komplexwertigen Funktionen f über \mathbb{R} , wobei $|f(t)e^{at}|^p$ über \mathbb{R} integrierbar ist. Diesen Raum bezeichnen wir kurz als L_p^a :

$$L_p^a := L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}, e^{at}) \quad . \quad (2.2)$$

Durch

$$|f|_p^a := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{at}|^p dt \quad \frac{1}{p} \quad (2.3)$$

wird L_p^a zu normierten Raum.

Um Verwechslungen von Normen verschiedener L_p^a -Räume zu vermeiden, kennzeichnen wir auch das Normzeichen mit den beiden Indizes p und a . Ein fortgelassener oberer Index kennzeichnet stets $a = 0$.

Im Grenzfall $p \rightarrow \infty$ wird die Norm zu

$$|f|_{\infty}^a := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) e^{at}| \quad . \quad (2.4)$$

Da der Raum L_p^a vollständig ist, ist er auch ein Banachraum.

Wichtig ist, daß der Raum L_p^a stets auf den Raum $L_p = L_p^0$ transformiert werden kann. Dies geschieht mit dem Exponentialoperator

$$(E_a f)(t) := f(t) e^{at} \quad . \quad (2.5)$$

Damit gilt

$$\|f\|_p^a = \|E_a f\|_p \quad . \quad (2.6)$$

Ist T ein Operator auf L_p^a , so wird er mit $E_a T E_{-a}$ in einen Operator auf L_p überführt. Es gilt

$$\|T\|_p^a = \|E_a T E_{-a}\|_p \quad . \quad (2.7)$$

Durch die Exponentialfunktion werden die Werte einer Funktion bei der Bildung der Norm unterschiedlich gewichtet. Damit eine Funktion zum Raum L_p^a ($a > 0$) gehört, muß sie also schnell genug mit der Zeit abklingen.

Die Normen der Räume L_p^a sind daher gut geeignet, das Abklingen von Zeitfunktionen zu beurteilen.

Im Folgenden werden uns nur die Fälle $p = 2$ und $p = \infty$ beschäftigen.

Die Funktionen aus dem L_2 haben eine beschränkte „Energie“. Die dem Raum L_∞ angehörenden Funktionen besitzen eine Schranke ihrer Amplitude für alle t ; die Norm gibt gerade den „Spitzenwert“ an

2.1 L_∞ -Normen linearer, zeitinvarianter Übertragungssysteme

Es liege ein lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem

$$y = \Gamma u \quad (2.8)$$

vor. Dies ist ein Teilsystem aus dem eingangs vorgelegten Standardregelkreis. Γ sei ein Operator auf L_∞ und soll wieder durch die Gewichtsfunktion g definiert werden,

$$\dot{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

mit $g(t) = 0$ für $t < 0$ (Γ kausal).

Wir bestimmen nun die Norm von Γ : Nach (1.20) gilt:

$$|\Gamma|_\infty = \sup_{u \in L_\infty} \frac{|\Gamma u|_\infty}{|u|_\infty}$$

Wir schätzen $|\Gamma u|_\infty$ ab und beachten (2.4):

$$\begin{aligned} |\Gamma u|_\infty &= |g * u|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)| d\tau \\ &= |u|_\infty \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Damit wird

$$|\Gamma|_\infty = \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \quad (2.10)$$

Die Auswertung des Integrals (2.10) dürfte bei den meisten Systemen besonders wegen des Betrags im Integranden große Mühe machen.

Oft kann man die Gewichtsfunktion durch eine Exponentialfunktion abschätzen:

$$|g(t)| \leq \zeta e^{-\delta t}, \quad \zeta, \delta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.11)$$

In diesem Fall finden wir für die Norm

$$|\Gamma|_{\infty} \leq \frac{\zeta}{\delta} \quad . \quad (2.12)$$

Durch diese Abschätzung ist leider auch noch nicht viel gewonnen, da sich zwar δ meist schnell angeben läßt, ζ hingegen wieder einen größeren Rechenaufwand zur Bestimmung benötigt. Außerdem kann es sein, daß durch (2.12) die Norm zu stark „überschätzt“ wird; wenn wir Satz 1.6 anwenden wollen, ist eine möglichst günstige Abschätzung von Vorteil. In jedem Fall bleibt natürlich die numerische Auswertung des Integrals (2.10).

Im Abschnitt 2.1.1 soll aber wenigstens für Systeme 1. und 2. Ordnung die L_{∞} -Norm explizit berechnet werden.

Eine meßtechnische Möglichkeit zur Bestimmung der L_{∞} -Norm bei Systemen mit reeller Gewichtsfunktion sei nun vorgestellt.

Die Funktion h definieren wir als Integral von g (g sei für $t \geq 0$ stetig, diese Voraussetzung kann man aber sehr schnell abschwächen):

$$h(t) := \int_{-\infty}^t g(\tau) \, d\tau \quad . \quad (2.13)$$

Die Funktion h wird auch als „Sprungantwort“ bezeichnet, da sie bei Aufschaltung der „Sprungfunktion“ σ ,

$$\sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad , \quad (2.14)$$

auf das System Γ als Ausgangsfunktion auftritt:

$$h = \Gamma\sigma = g*\sigma \quad . \quad (2.15)$$

Die Sprungfunktion h ist mithin bei einem real vorliegenden System meßbar.

Die Gewichtsfunktion wurde als reell vorausgesetzt. Die Nullstellen von g , an denen $g(t)$ das Vorzeichen wechselt, seien t_1, t_2, t_3, \dots . An diesen Stellen hat h Extremwerte. Jetzt schreiben wir das Integral (2.10) als

$$\begin{aligned} |\Gamma|_\infty &= \left| \int_0^{t_1} g(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} g(\tau) d\tau + \int_{t_2}^{t_3} g(\tau) d\tau - \dots \right| \\ &= \left| [h(\tau)]_0^{t_1} - [h(\tau)]_{t_1}^{t_2} + [h(\tau)]_{t_2}^{t_3} - \dots \right| \\ |\Gamma|_\infty &= \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit $\Delta h_k = |h(t_k) - h(t_{k-1})|$, $t_0 := 0$. (2.17)

Die Werte Δh_k sind direkt einer Messung von h zu entnehmen:

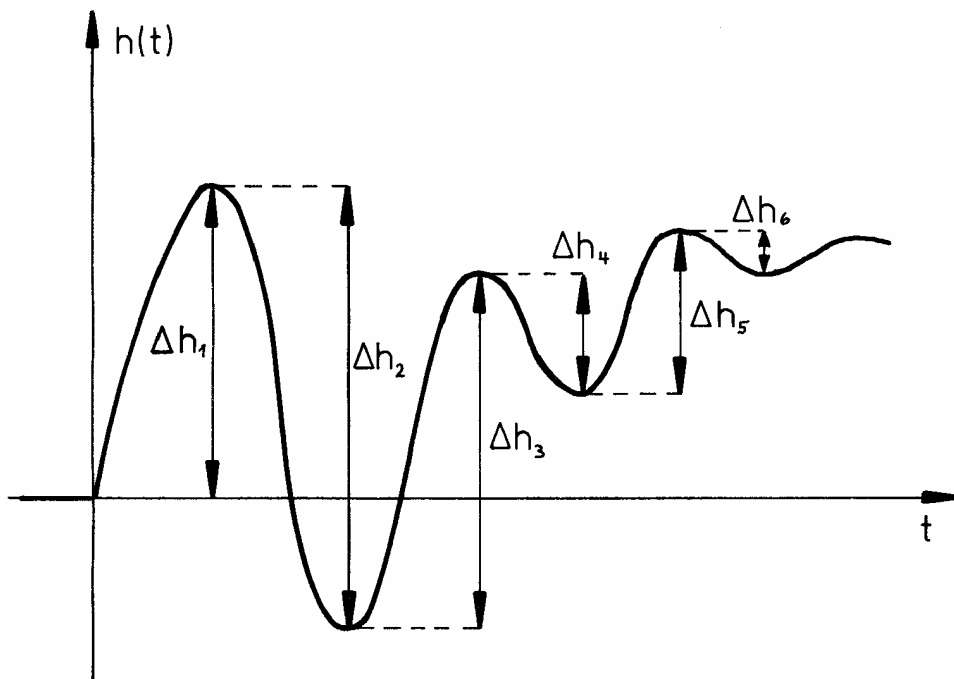


Bild 5

Als Näherung der Norm kann man die Reihe (2.16) nach den ersten Gliedern abbrechen.

Hat die Funktion h kein Extremum (z.B. bei VZ1-Gliedern), so wechselt g nie das Vorzeichen und es ist

$$|\Gamma|_{\infty} = |h(\infty)| \quad . \quad (2.18)$$

2.1.1 L_∞ -Normen von Systemen 2. Ordnung

Als Systeme n -ter Ordnung bezeichnet man solche Systeme, bei denen die Laplacetransformierte der Gewichtsfunktion $G = \mathcal{L}g$ eine gebrochene rationale Funktion ist, wobei Zähler- und Nennergrad nicht größer als n sind. Hier seien nur reelle Systeme mit Zählergrad kleiner Nennergrad betrachtet.

Zu der Norm des Systems 1. Ordnung (VZ1-Glied) kommen wir sehr schnell (Γ_1 ist der Operator, g_1 die Gewichtsfunktion und G_1 die Laplacetransformierte des VZ1-Gliedes).

G_1 liegt in der Normalform

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (2.19)$$

vor. Faktoren vor dem Bruch lassen wir weg; sie sind nicht wesentlich. Dann ist

$$g_1(t) = \begin{cases} \omega_0 e^{-\omega_0 t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Damit wird

$$|\Gamma_1|_\infty = \int_0^\infty \omega_0 e^{-\omega_0 \tau} d\tau = 1 \quad (2.21)$$

Die L_∞ -Norm des normierten VZ1-Gliedes ist also unabhängig von der Knickfrequenz ω_0 stets 1.

Komplizierter wird die Integration bereits beim System 2. Ordnung. Auch G_2 soll in einer Normalform vorliegen:

$$G_2(s) = \frac{c + b\frac{s}{\omega_0}}{1 + 2d\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}, \quad b, c \in \mathbb{R}, d, \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (2.22)$$

Hier müssen wir nun leider Fallunterscheidungen treffen. Für $d < 1$ hat $G_2(s)$ ein konjugiert komplexes Polpaar; das

System ist schwingfähig, die Gewichtsfunktion hat dann unendlich viele Nullstellen. Bei $d > 1$ gibt es zwei reelle Polstellen, das System ist nicht mehr schwingfähig und die Gewichtsfunktion hat höchstens eine Nullstelle. Im Fall $d = 1$ haben wir eine doppelte reelle Nullstelle.

Im allgemeinen Fall sind die Polstellen von G_2

$$\begin{aligned} s_1 &= \omega_0 (-d + r) \quad , \\ s_2 &= \omega_0 (-d - r) \quad , \quad r = \sqrt{d^2 - 1} \in \mathbb{C} \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Aus [B1], S. 689 entnehmen wir die Korrespondenzen ($s_1 \neq s_2$)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \right] (t) = \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad , \quad (2.24)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)} \right] (t) = \frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \quad . \quad (2.25)$$

Daraus ergibt sich für $d \neq 1$

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{c\omega_0^2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{b\omega_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \\ g_2(t) &= \frac{\omega_0}{2r} \left[(c + b\frac{s_1}{\omega_0}) e^{s_1 t} - (c + b\frac{s_2}{\omega_0}) e^{s_2 t} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nun müssen wir die Fallunterscheidungen treffen. Zuerst $d < 1$: Da $s_1 = \overline{s_2}$, ist r imaginär. Wir nennen

$$\hat{r} := |r| = \sqrt{1 - d^2} \quad (2.27)$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{\omega_0}{2\hat{r}} 2 \operatorname{Im} \left[(c + b\frac{s_1}{\omega_0}) e^{s_1 t} \right] \\ g_2(t) &= \frac{\omega_0}{\hat{r}} \operatorname{Im} \left[(c + b(-d + j\hat{r})) e^{j\hat{r}\omega_0 t} \right] e^{-d\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$g_2(t) = \frac{\omega_0}{\hat{r}} e^{-d\omega_0 t} A v \sin(\hat{r}\omega_0 t + \phi) \quad (2.28)$$

mit $\phi = \arctan \frac{b\hat{r}}{c-bd}$, (2.29)

$$A = ((c-bd)^2 + b^2\hat{r}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

$$v = \begin{cases} 1 & \text{für } c-bd \geq 0 \\ -1 & \text{für } c-bd < 0 \end{cases} . \quad (2.31)$$

Kommen wir zum Integral (2.10):

$$\begin{aligned} |\Gamma_2|_\infty &= \int_0^\infty \frac{\omega_0}{\hat{r}} e^{-d\omega_0 t} A |v \sin(\hat{r}\omega_0 t + \phi)| dt \\ &= \frac{A\omega_0}{\hat{r}} \int_0^\infty e^{-d\omega_0 t} |\sin(\hat{r}\omega_0 t + \phi)| dt \end{aligned}$$

Wir führen die Substitution

$$\tau = \omega_0 t + \tau_1, \quad \tau_1 = \frac{\phi}{\hat{r}} \quad (2.32)$$

durch:

$$\begin{aligned} |\Gamma_2|_\infty &= \frac{A}{\hat{r}} \int_{\tau_1}^\infty e^{-d(\tau-\tau_1)} |\sin \hat{r}\tau| d\tau \\ &= \frac{A}{\hat{r}} e^{d\tau_1} \int_{\tau_1}^\infty e^{-d\tau} |\sin \hat{r}\tau| d\tau \\ &= \frac{A}{\hat{r}} e^{d\tau_1} \left[- \int_0^{\tau_1} e^{-d\tau} |\sin \hat{r}\tau| d\tau \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_{\frac{k}{\hat{r}}\pi}^{\frac{k+1}{\hat{r}}\pi} e^{-d\tau} \sin \hat{r}\tau d\tau \right] \end{aligned}$$

Nach [B1], S. 114, Nr. 459:

$$\begin{aligned} |\Gamma_2|_\infty &= \frac{A}{\hat{r}} e^{d\tau_1} \left[- \operatorname{sign}(\tau_1) [e^{-d\tau} (-d \sin \hat{r}\tau - \hat{r} \cos \hat{r}\tau)]_0^{\tau_1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^\infty (-1)^k [e^{-d\tau} (-d \sin \hat{r}\tau - \hat{r} \cos \hat{r}\tau)]_{\frac{k}{\hat{r}}\pi}^{\frac{k+1}{\hat{r}}\pi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A e^{d\tau_1} \left[\operatorname{sign}(\tau_1) \left(e^{-d\tau_1} \left(\frac{d}{r} \sin \phi + \cos \phi \right) - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} 2 e^{-\frac{d}{r} \pi k} - 1 \right] \\
|\Gamma_2|_{\infty} &= A \left[\operatorname{sign}(\tau_1) \left(\frac{d}{r} \sin \phi + \cos \phi - e^{d\tau_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{d\tau_1} \left(\frac{2}{1 - e^{-\frac{d}{r} \pi}} - 1 \right) \right] \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Nun noch für $d > 1$. Jetzt sind s_1 und s_2 reell; g_2 nach (2.26) kann nur noch eine Nullstelle haben. Dann muß

$$(c + b \frac{s_1}{\omega_0}) e^{s_1 t} = (c + b \frac{s_2}{\omega_0}) e^{s_2 t} \quad (2.34)$$

eine Lösung $t_0 \in \mathbb{R}^+$ haben:

$$\begin{aligned}
\frac{c + b(-d-r)}{c + b(-d+r)} &= e^{(s_1 - s_2)t_0} = e^{2\omega_0 r t_0} \quad \leftrightarrow \\
2\omega_0 r t_0 &= \ln \frac{c + b(-d-r)}{c + b(-d+r)} \quad \leftrightarrow \\
t_0 &= \frac{1}{2\omega_0 r} \ln \frac{c - b(d+r)}{c - b(d-r)} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Eine Lösung $t_0 \in \mathbb{R}^+$ gibt es genau dann, wenn

$$\frac{c - b(d+r)}{c - b(d-r)} > 1 \quad (2.36)$$

ist. Jetzt können wir die Norm berechnen:

$$|\Gamma_2|_{\infty} = \left| \int_0^{t_0} g_2(t) dt - \int_{t_0}^{\infty} g_2(t) dt \right| \quad (2.37)$$

$$= \frac{\omega_0}{2r} \left| \left(\frac{c}{s_1} + \frac{b}{\omega_0} \right) (2 e^{s_1 t_0} - 1) - \left(\frac{c}{s_2} + \frac{b}{\omega_0} \right) (2 e^{s_2 t_0} - 1) \right|$$

$$|\Gamma_2|_{\infty} = \frac{1}{2r} \left| \left(b - \frac{c}{d-r} \right) (2 e^{s_1 t_0} - 1) - \left(b - \frac{c}{d+r} \right) (2 e^{s_2 t_0} - 1) \right| \quad (2.38)$$

Wird (2.36) nicht erfüllt, gibt es keine Lösung $t_0 \in \mathbb{R}$.
 In diesem Fall ist das Integral einfach:

$$|\Gamma_2|_\infty = c \quad (2.39)$$

In den Bildern 6 bis 9 ist $|\Gamma_2|_\infty$ über der Dämpfung d bis $d \leq 2$ dargestellt. Die Parameter der Kurvenscharen sind abwechselnd b und c (positive und negative Werte jeweils getrennt). Die Zeichnungen stellen also eine Zusammenfassung der Formeln (2.33), (2.38) und (2.39) dar.

Der Fall $d = 1$ ist nicht behandelt. Er kann aber durch Grenzübergang $d \rightarrow 1$ gewonnen werden. Deshalb dürfen wir die Werte für $d = 1$ aus den Zeichnungen ablesen.

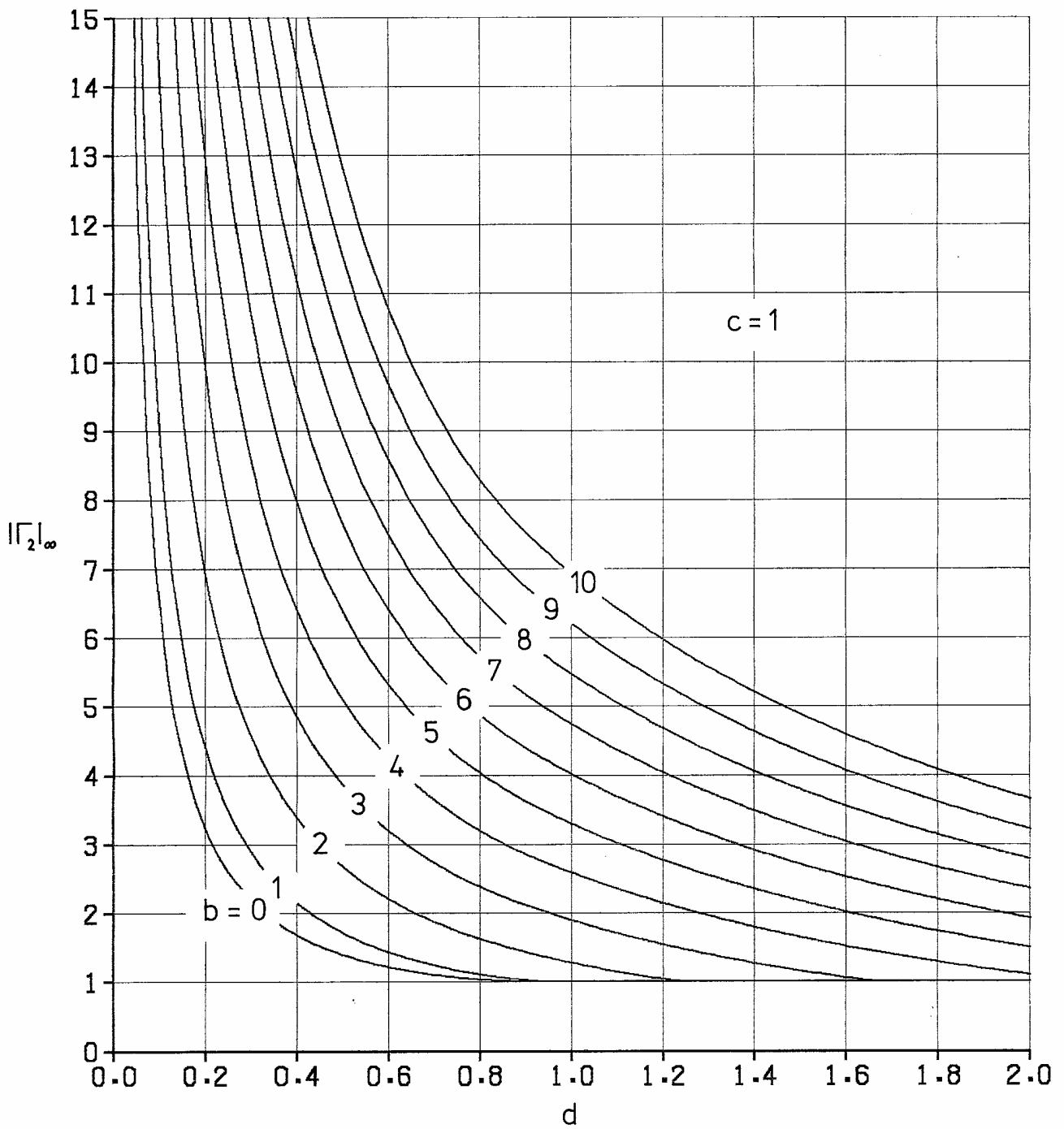


Bild 6

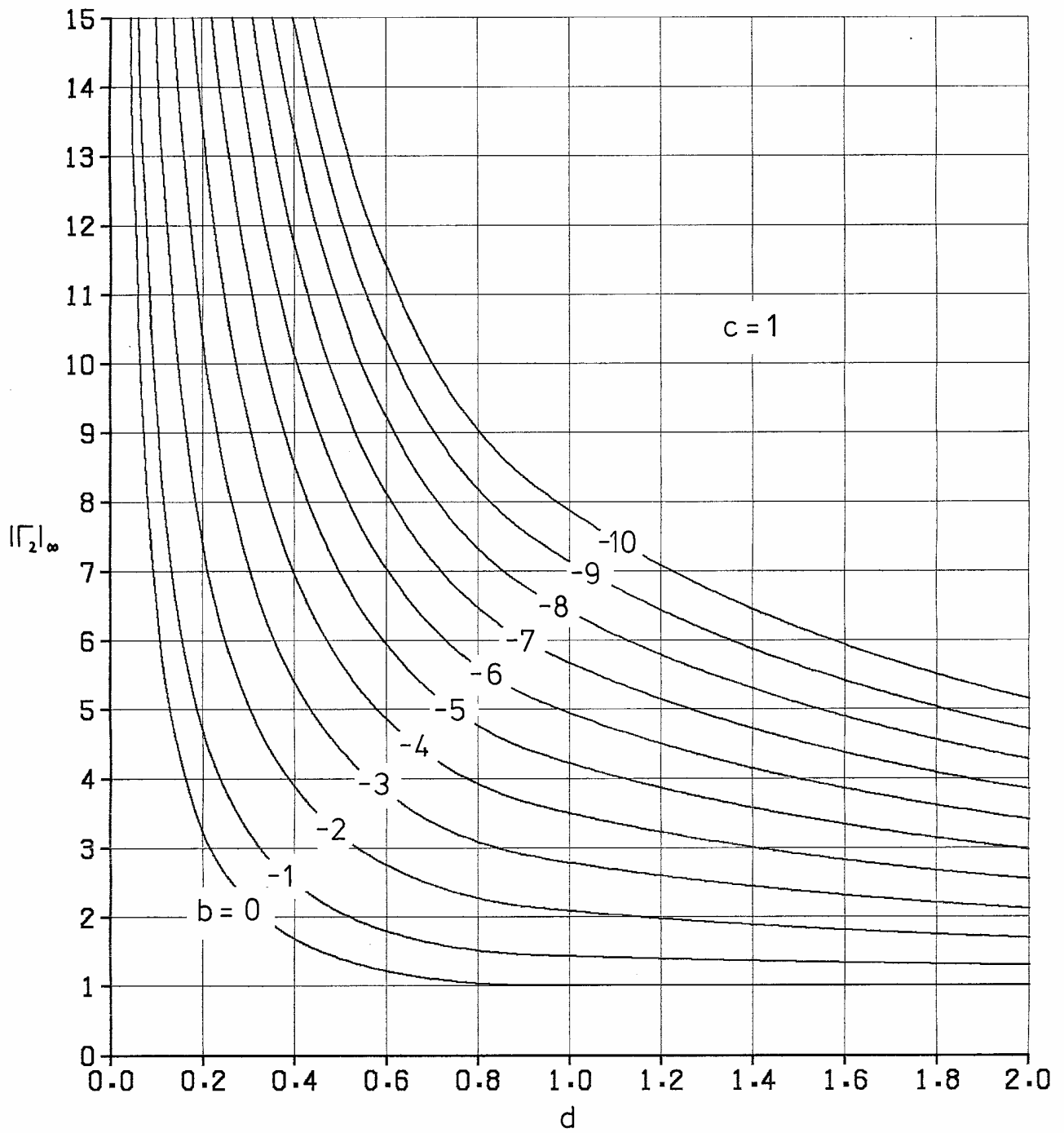


Bild 7

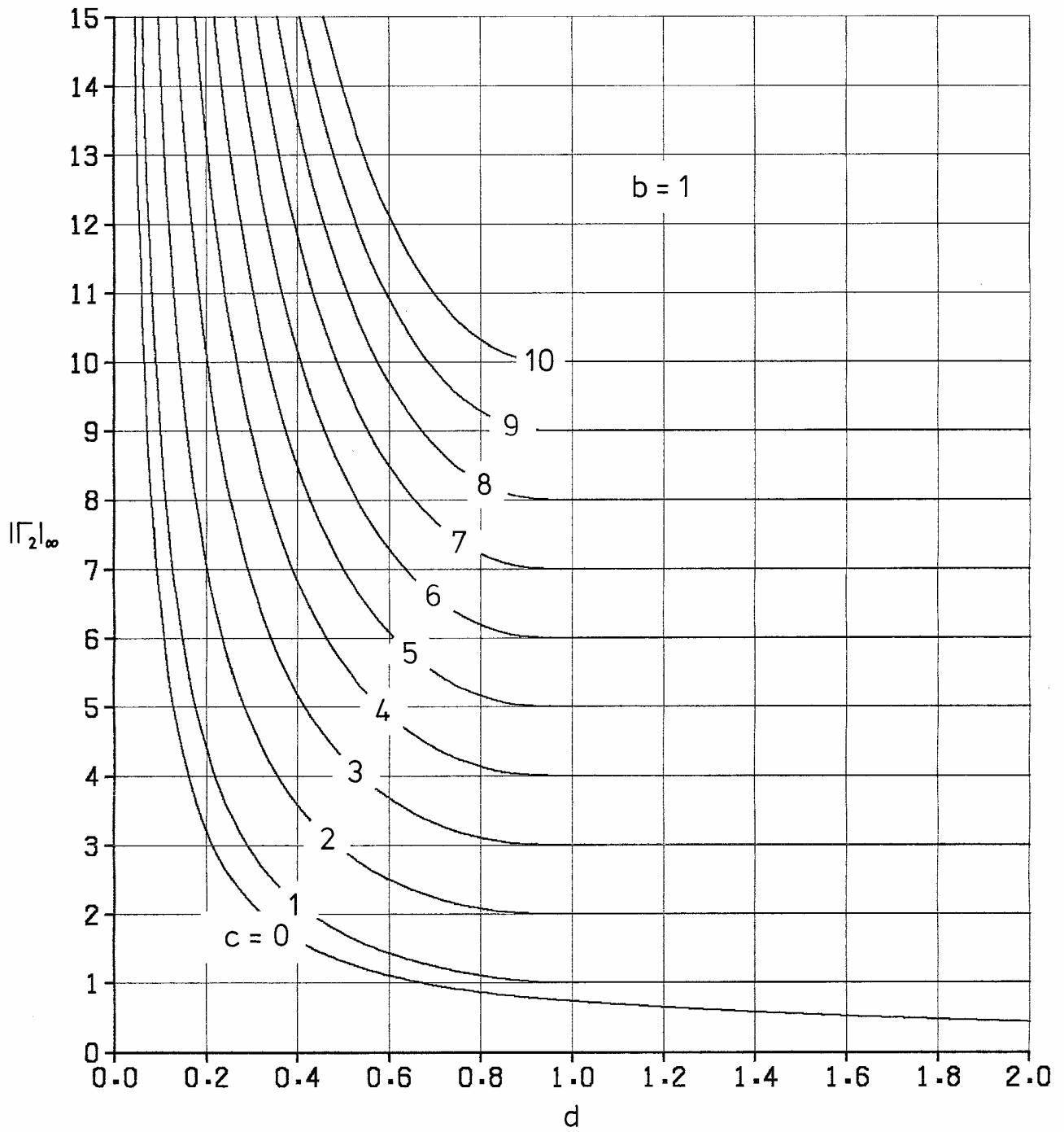


Bild 8

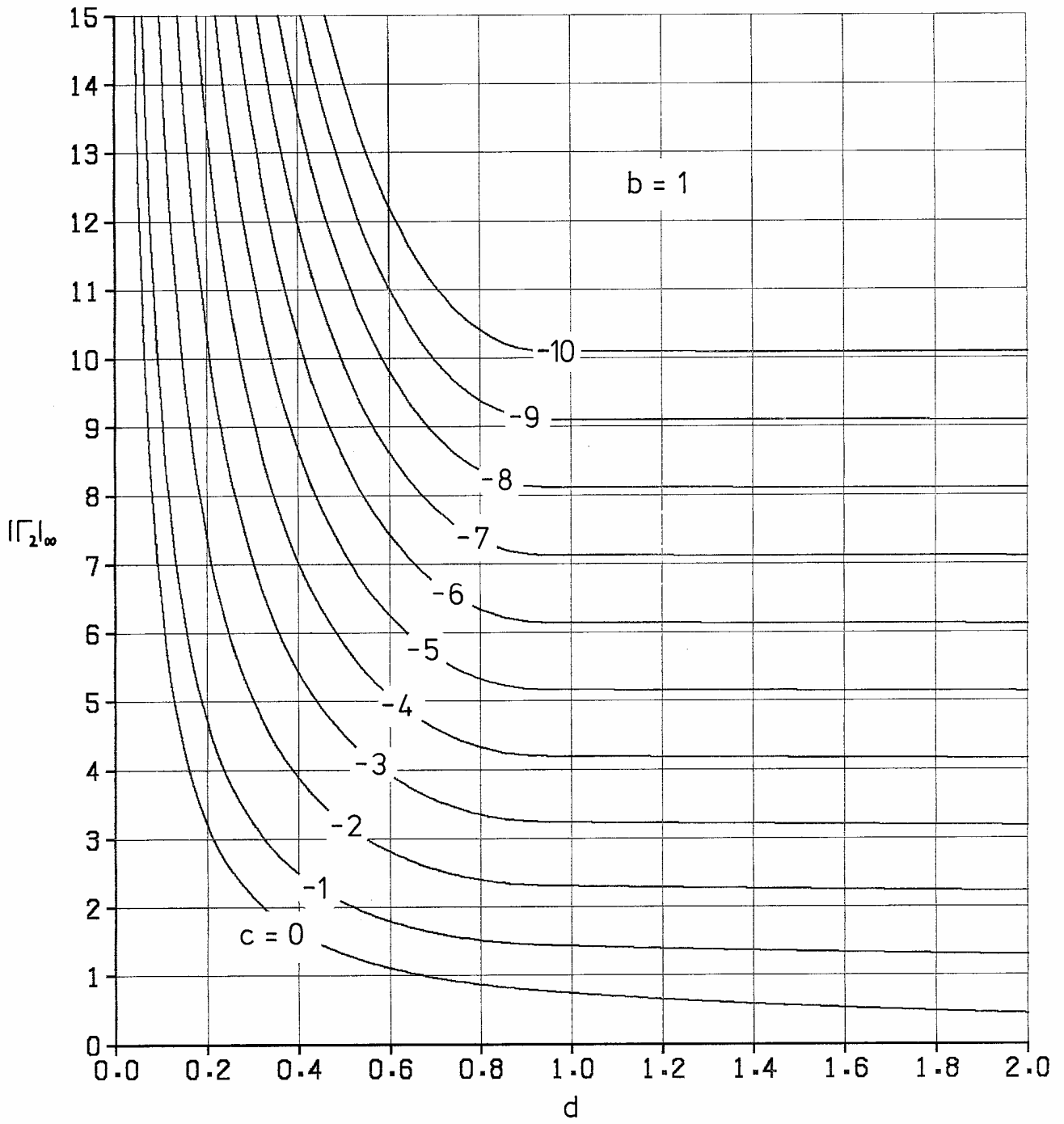


Bild 9

2.2 L_2^a -Normen linearer, zeitinvarianter Übertragungssysteme

Es liegt dasselbe System vor wie im Abschnitt 2.1, (2.8), (2.9). Γ sei ein Operator auf L_2^a und es existiere die Laplace-transformierte

$$G = \mathcal{L}g \quad . \quad (2.40)$$

Dann gilt nach (2.3)

$$\left(\|y\|_2^a\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t) e^{at}|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |(g*u)(t) e^{at}|^2 dt .$$

Mit der Parsevalschen Gleichung und dem Verschiebungssatz der Laplacetransformation (s. [F1]) gilt:

$$\begin{aligned} \left(\|y\|_2^a\right)^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega-a) U(j\omega-a)|^2 d\omega \\ &\leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega-a)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega-a)|^2 d\omega \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega-a)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) e^{at}|^2 dt \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega-a)|^2 \left(\|u\|_2^a\right)^2 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|\Gamma\|_2^a = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega-a)| \quad (2.41)$$

Durch die Methoden der Frequenzkennlinien läßt sich die L_2^a -Norm auch bei komplizierteren Systemen bestimmen.

Ebenso wie die L_∞ -Norm läßt sich auch die L_2 -Norm auf meßtechnischem Wege gewinnen. Für die L_2 -Norm ist die Aufnahme eines Frequenzganges nötig.

Bemerkung: Γ ist genau dann Operator auf L_2^a , wenn $G(s)$ im Gebiet $\text{Re}(s) \geq -a$ regulär ist. Nur dann gilt auch (2.41).

2.2.1 L_2 -Normen von Systemen 2. Ordnung

Das System soll wieder reell sein. Zuerst die Norm des Systems 1. Ordnung (2.19):

$$|\Gamma_1|_2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} = 1 \quad (2.42)$$

Nun zum System 2. Ordnung (2.22). Wir führen die normierte Größe

$$\hat{\omega} := \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.43)$$

ein. Dann ist

$$G_2(j\omega) = \frac{c + bj\hat{\omega}}{1 + 2dj\hat{\omega} - \hat{\omega}^2} \rightarrow \quad (2.44)$$

$$|G_2(j\omega)|^2 = \frac{c^2 + b^2\hat{\omega}^2}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + 4d^2\hat{\omega}^2}$$

Abkürzungen:

$$\Omega := \hat{\omega}^2, \quad B := b^2, \quad C := c^2, \quad D := d^2 \quad (2.45)$$

$$|G_2(j\omega)|^2 = \frac{C + B\Omega}{1 - 2\Omega + \Omega^2 + 4D\Omega} \quad (2.46)$$

Maximum bestimmen:

$$0 = \frac{d}{d\Omega} |G_2(j\omega)|^2 = \frac{B(1 - 2\Omega + \Omega^2 + 4D\Omega) - (C + B\Omega)(-2 + 2\Omega + 4D)}{(1 - 2\Omega + \Omega^2 + 4D\Omega)^2}$$

$$\leftrightarrow 0 = B - 2B\Omega + B\Omega^2 + 4BD\Omega + 2C - 2C\Omega - 4CD + 2B\Omega - 2B\Omega^2 - 4BD\Omega$$

$$\leftrightarrow 0 = B\Omega^2 + 2C\Omega + 4CD - B - 2C \quad (2.47)$$

$B \neq 0 \rightarrow$

$$\Omega_{1,2} = -\frac{C}{B} \pm \sqrt{\frac{C^2}{B^2} - \frac{4CD}{B} + 1 + \frac{2C}{B}}$$

Nur wenn $\Omega_1 \in \mathbb{R}^+$, gibt es eine Lösung $\hat{\omega}_1 \in \mathbb{R}^+$:

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\Omega_1} \quad . \quad (2.49)$$

Sonst wird das Maximum bei

$$\hat{\omega}_1 = 0 \quad (2.50)$$

angenommen. Sofern $B = 0$ (VZ2-Glied) ergibt sich aus (2.47):

$$0 = 2\Omega + 4D - 2$$

$$\Omega_1 = 1 - 2D \quad (2.51)$$

Bei $D < \frac{1}{2}$ gibt es eine positive reelle Lösung

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\Omega_1} \quad , \quad (2.52)$$

bei $D \geq \frac{1}{2}$ liegt das Maximum bei

$$\hat{\omega}_1 = 0 \quad . \quad (2.53)$$

Die L_2 -Norm wird damit zu

$$|\Gamma_2|_2 = |G(j\omega_1)| \quad , \quad \omega_1 = \hat{\omega}_1 \omega_0 \quad . \quad (2.54)$$

Die Bilder 10 und 11 zeigen die grafische Darstellung der Norm $|\Gamma_2|_2$ über der Dämpfung d ($d \leq 2$). Der Kurvenparameter ist in Bild 10 $|b|$ und in Bild 11 $|c|$.

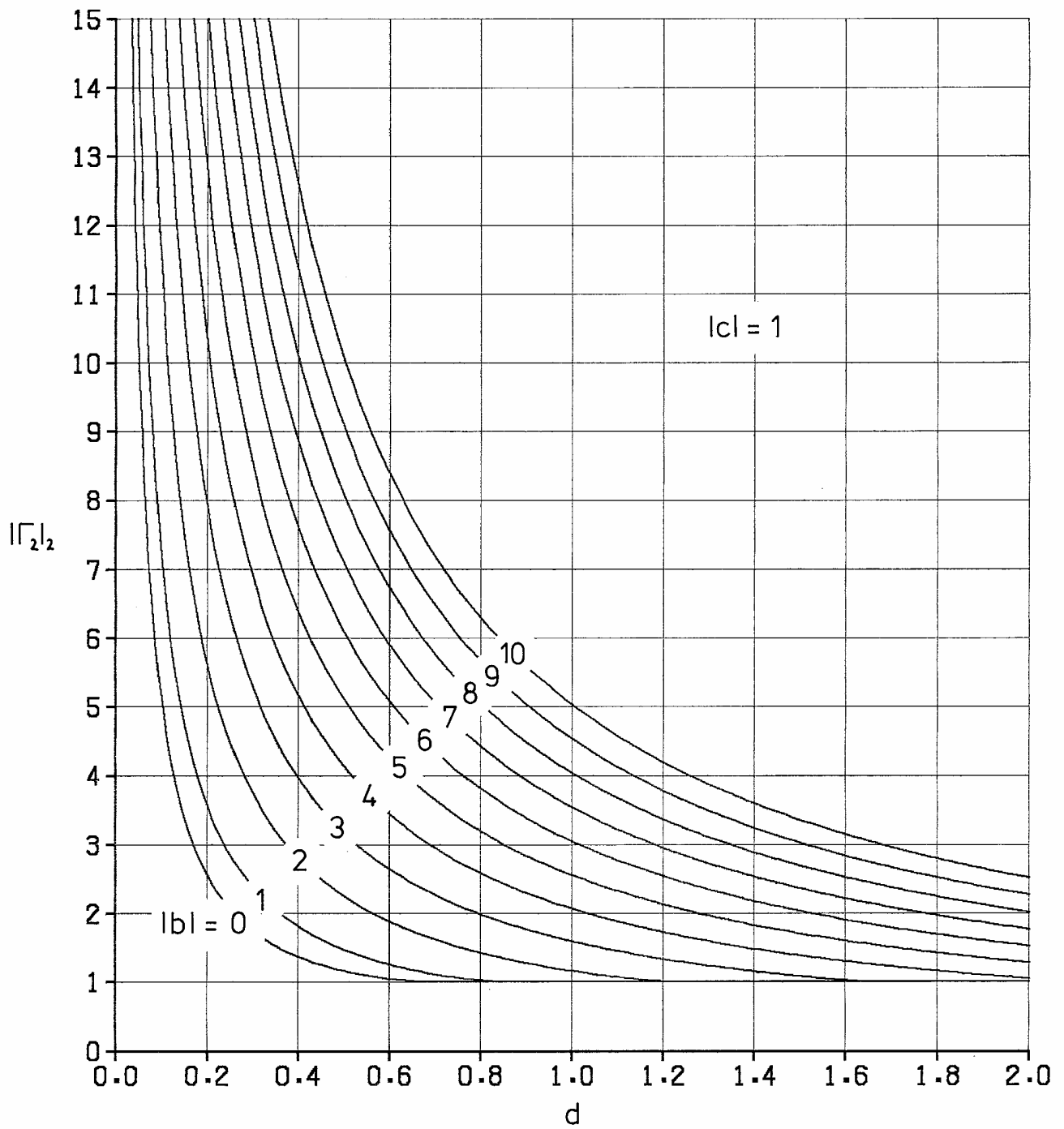


Bild 10

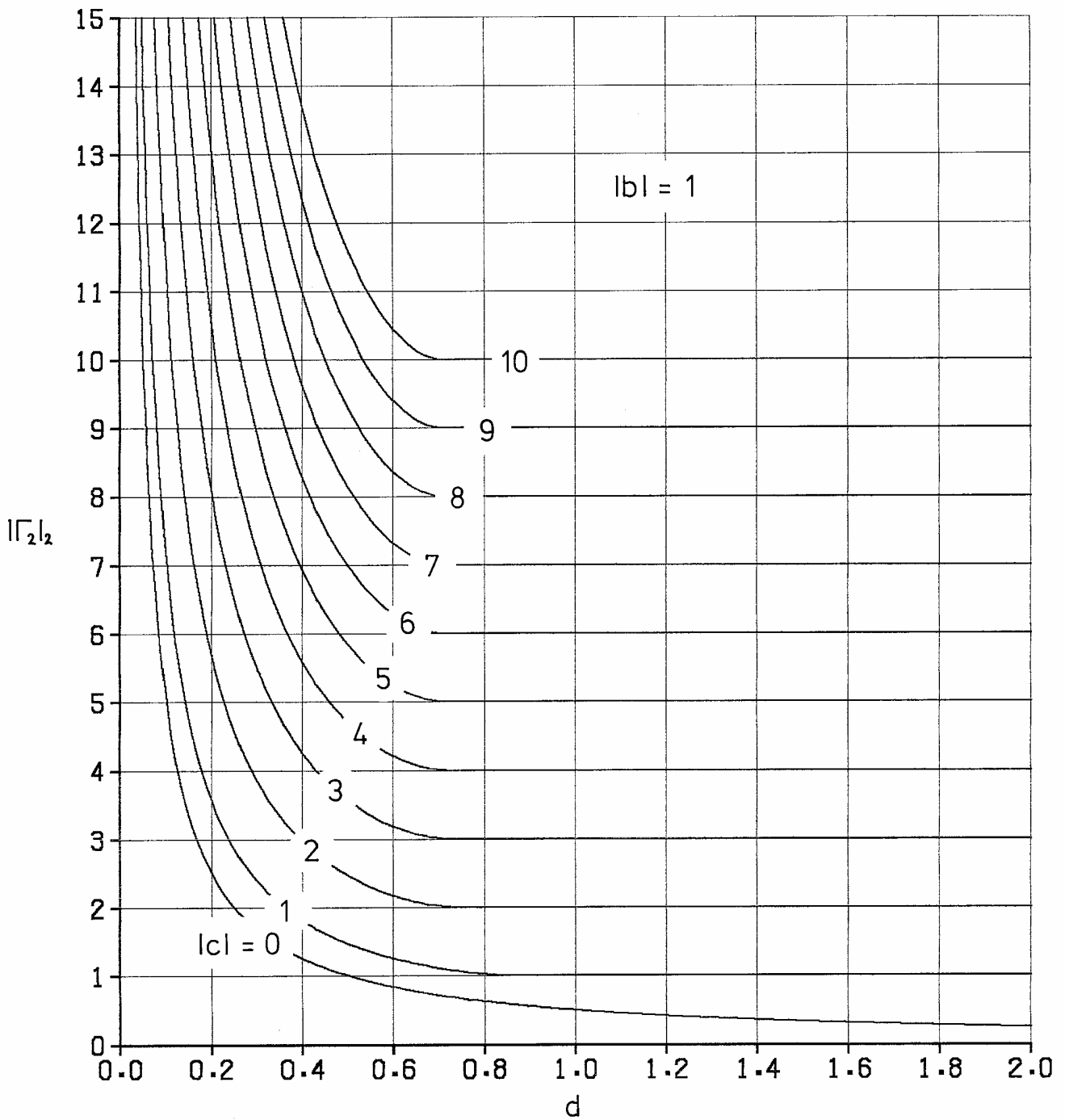


Bild 11

3. Stabilitätskriterien für die L_∞ -Stabilität

In diesem Kapitel sollen nun zwei Möglichkeiten vorgestellt werden, zu einer Aussage über die L_∞ -Stabilität zu gelangen.

Fassen wir das bisherige zuerst zusammen, um die weitere Vorgehensweise zu verdeutlichen: Im 1. Kapitel wurde der Standardregelkreis vorgelegt. Durch sehr allgemeine Überlegungen wurde ein Stabilitätskriterium (Satz 1.6) gefunden, welches Aussagen über die Stabilität unseres nichtlinearen, zeitinvarianten Standardregelkreises in verschiedenen Funktionenräumen ermöglicht. Nach diesem Satz muß es für die beiden Teilsysteme Γ und N Schranken (Normen) geben, deren Produkt kleiner 1 ist. Die wesentliche Bedingung des Satzes 1.6 können wir zusammenfassen als „Norm der Kreisübertragung kleiner 1“.

Im 2. Kapitel wurden dann die Funktionenräume L_p^a beschrieben. Im besonderen gingen wir auf die Räume L_∞ und L_2^a ein. Die Norm eines Operators oder Übertragungssystem im Raum L_∞ gibt gerade die maximal mögliche „Spitzenwertübertragung“ an (Spitzenwert der Ausgangsgröße bezogen auf den Spitzenwert der Eingangsgröße). Die Operatornorm im Raum L_2 ist ein Maß für die maximal mögliche „Energieübertragung“ eines Systems, da Energien und Leistungen quadratisch von den Funktionswerten abhängen. Die Begriffe Energie und Leistung können hier auch ideell aufgefaßt werden.

Im allgemeinen ist es nun nicht möglich, durch die Stabilität in einem Funktionenraum die Stabilität in einem anderen zu begründen.

Um nun zu einer Aussage über die „Spitzenwertübertragung“ oder die „Aussteuerung“ des Gesamtsystems zu gelangen,

liegt es nahe, das allgemeine Stabilitätskriterium 1.6 im Raum L_∞ anzuwenden. Dies ist auch tatsächlich die erste Alternative in diesem Kapitel. Dabei treten allerdings die bereits in Abschnitt 2.1 erwähnten Schwierigkeiten bei der Berechnung der L_∞ -Norm auf. Einige Beispiele werden jedoch zeigen, daß trotzdem eine vorteilhafte Anwendung möglich ist.

Nun zum zweiten Weg, den wir zur Begründung der L_∞ -Stabilität gehen werden. Hierbei werden wir die Untersuchungen nicht direkt im Raum L_∞ durchführen, sondern zuerst die L_2^a -Stabilität untersuchen. Die Stabilität im Raum L_2 wird durch das bekannte Kreiskriterium beantwortet, ebenso die im Raum L_2^a , bei der man auch von „exponentieller Stabilität von Grade a “ spricht. Das Kreiskriterium wird z.B. in [H1] oder [D1] angegeben, in sehr allgemeiner Form auch für unendlichdimensionale Größen in [D2].

Wie oben erwähnt, ist die Folgerung der L_∞ -Stabilität aus der des Raumes L_2 im allgemeinen nicht möglich. Für den speziellen vorgelegten Standardregelkreis nach Bild 1 geht dies aber doch! Diese Tatsache läßt sich auch bei mehreren Autoren entnehmen; z.B. [B3], S. 190ff; [D2], S. 8 oder S. 126ff; [Z1]. Die Frage der L_∞ -Stabilität wäre damit prinzipiell schon beantwortet. Unser Anliegen ist es jedoch, nicht nur die L_∞ -Stabilität zu sichern sondern darüber hinaus auch eine möglichst günstige Abschätzung (d.h. eine möglichst kleine Schranke) für die L_∞ -Norm zu gewinnen, um technisch relevante Aussagen treffen zu können. Diesem weiteren Anliegen wird in den zitierten Stellen nicht viel Rechnung getragen. Die beiden ersten Autoren gehen vom Zustandsmodell eines Systems aus, was bei der Übersetzung auf das vorliegende Übertragungsmodell weitere unnötige Abschätzungen einfließen läßt. Im Gegensatz dazu behandelt [Z1] zwar ein Übertragungsmodell, doch

wird auch dort einer möglichst günstigen Abschätzung nicht viel Aufmerksamkeit gewidmet.

Diesen geschilderten Anforderungen versucht nun die zweite hier behandelte Alternative gerecht zu werden. Das Verfahren wird zwar aufwendiger als das ursprüngliche Kreiskriterium, auf dem es teilweise aufbaut, durch den Einsatz eines leistungsfähigen Rechenschemas läßt sich dieser Weg aber auch noch bei komplizierteren Systemen von Hand durchführen. Voraussetzung ist aber, daß die Übertragungsfunktion G in Form einer reellen gebrochenen rationalen Funktion vorliegt.

3.1 Stabilität direkt im Raum L_∞

Nach der geleisteten Vorarbeit können wir nun unmittelbar ein Stabilitätskriterium im Raum L_∞ angeben. Wir verwenden den allgemeinen Stabilitätssatz 1.6 (mit Vermutung 1.7) und die L_∞ -Norm nach Abschnitt 2.1:

Satz 3.1 (L_∞ -Stabilität nichtlinearer Systeme):

Es liege der Standardregelkreis nach (1.1), (1.2) vor:

$$y = \Gamma u \quad , \quad (3.1)$$

$$u = r - Ny \quad . \quad (3.2)$$

Das Teilsystem Γ ist nicht sprungfähig (Bedingung (1.46)) und werde durch die Gewichtsfunktion g beschrieben,

$$y = g * u \quad . \quad (3.3)$$

Weiter sei g absolut integrierbar, d.h. es gibt eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\int_0^\infty |g(t)| \, dt \leq \gamma \quad . \quad (3.4)$$

Der nichtlineare Operator N hat eine Schranke $\nu \in \mathbb{R}_0^+$,

$$|N|_\infty \leq \nu \quad (3.5)$$

oder erfülle die speziellere Sektorbedingung

$$|(Ny)(t)| \leq \nu |y(t)| \quad (3.6)$$

für alle y . Ist nun

$$\alpha := \gamma\nu < 1 \quad , \quad (3.7)$$

so ist das System (3.1), (3.2) L_∞ -stabil und für die Funktionen u und y lassen sich Abschätzungen angeben:

$$\frac{|u|_{\infty}}{|r|_{\infty}} \leq \frac{1}{1-\alpha} \quad (3.8)$$

und
$$\frac{|y|_{\infty}}{|r|_{\infty}} \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} \quad (3.9)$$

Beweis:

Nach (2.10) ist die L_{∞} -Norm von Γ das Integral des Betrags der Gewichtsfunktion. Mit Voraussetzung (3.4) ist also

$$|\Gamma|_{\infty} \leq \gamma \quad .$$

Die Sektorbedingung (3.6) impliziert (3.5):

$$|N|_{\infty} \leq \nu \quad .$$

Hiermit können wir Satz 1.6 (mit Vermutung 1.7) anwenden, was sofort die L_{∞} -Stabilität und (3.8), (3.9) sichert.

In Satz 3.1 ist bereits eine Möglichkeit enthalten, eine Voraussetzung abzuschwächen. Die Nichtlinearität N muß nicht unbedingt eine Sektorfunktion nach (3.6) sein sondern N kann auch der allgemeineren Bedingung (3.5) genügen.

Die Bedeutung der Sektorbedingung (1.7) bzw. (3.6) liegt darin, daß sie eine Schranke für N in allen Funktionsräumen sichert. Außerdem ist sie sehr schnell zu überprüfen.

Es gibt nun aber wichtige Nichtlinearitäten, die keine Sektorfunktionen nach (3.6) sind, für die sich aber die Voraussetzung (3.5) sichern läßt. Wohlgermerkt braucht eine Schranke in anderen Räumen nicht zu existieren (z.B. im L_2). Wir können daher Satz 3.1 sogar bei solchen nichtlinearen Regelkreisen anwenden, bei denen das Kreiskriterium gar keine Aussage ermöglicht (dieses geht nur von Sektorfunktionen aus).

Einige solcher Nichtlinearitäten seien hier angegeben:

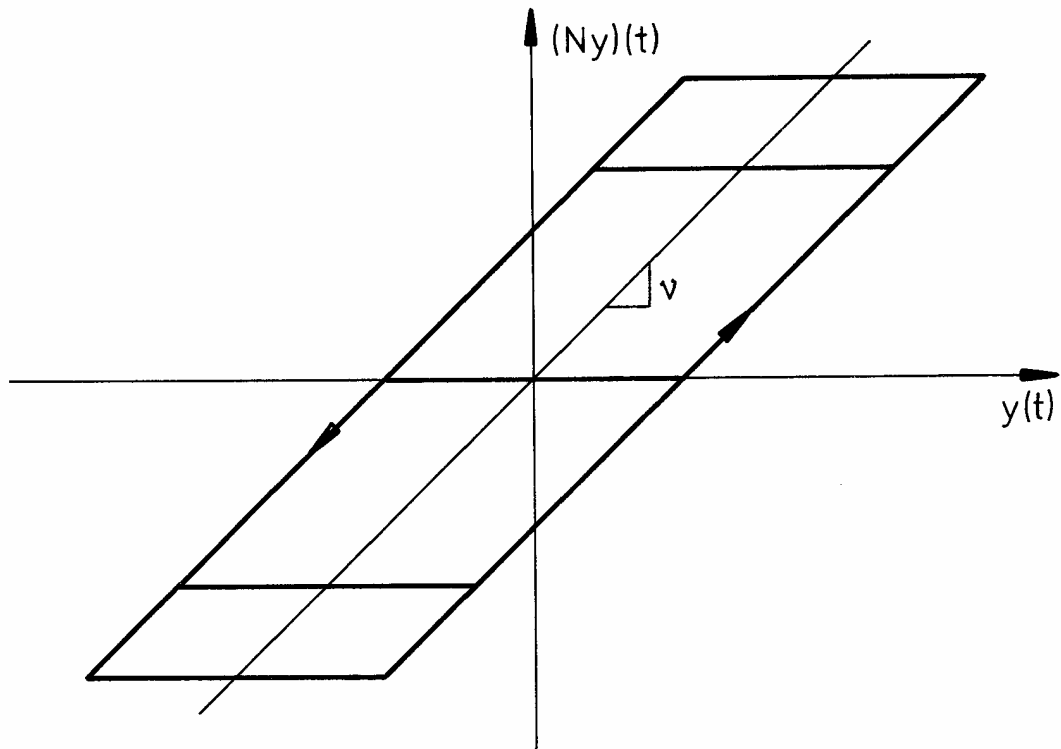


Bild 12

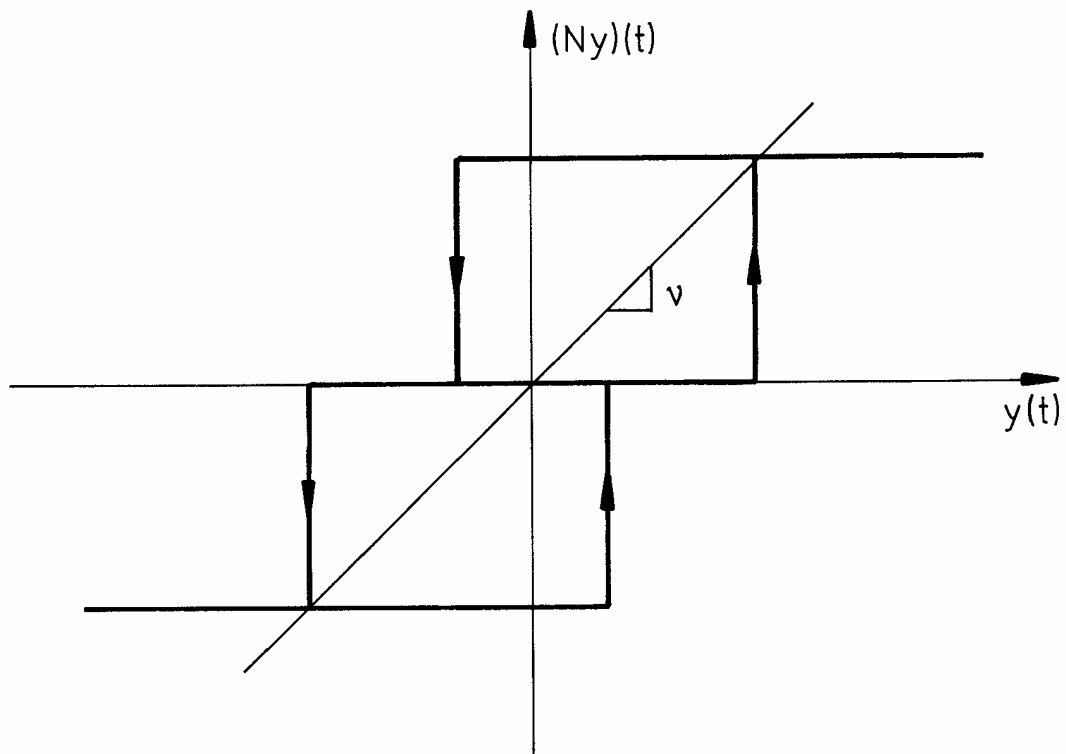


Bild 13

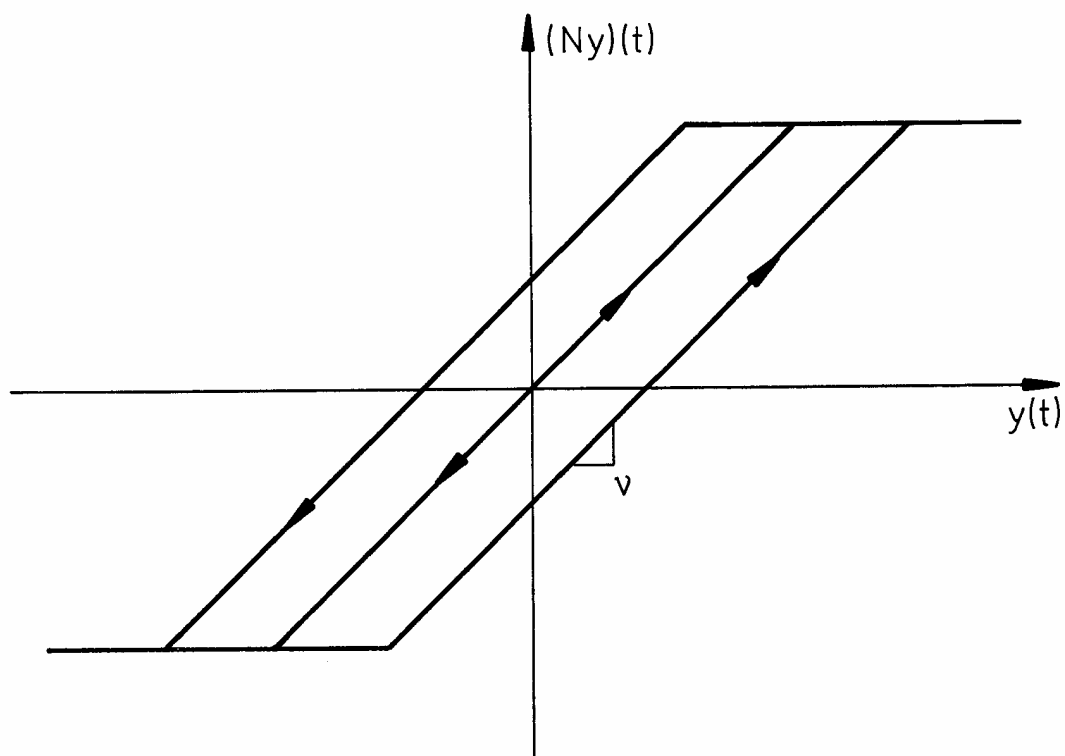


Bild 14

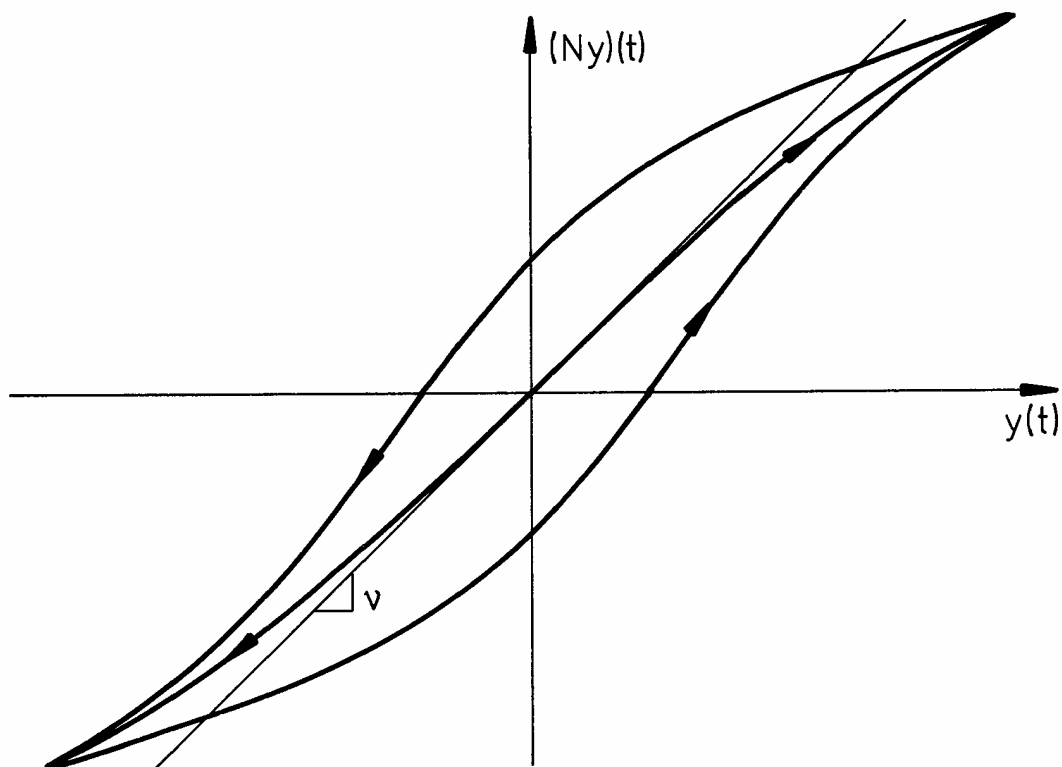


Bild 15

Alle diese Nichtlinearitäten genügen der Bedingung (3.5) Unbeschadet könnte jeweils noch ein Totzeitglied in Reihe geschaltet werden. Es sind aber noch einige Bemerkungen zu machen: Die Lose nach Bild 12 muß so beschaffen sein, daß für einen Anfangszeitpunkt t_0 gilt $(N_y)(t_0) = 0$ (Kurve beginnt im Ursprung). Dann bleibt die Ausgangsfunktion N_y in ihrem Maximalwert stets unter dem von v_y , was (3.6) impliziert.

Auch das Dreipunktglied nach Bild 13 hat eine Schranke v . Die Hysterese ist sogar so extrem beschaffen, daß der Ausgang erst nach Änderung des Vorzeichens des Eingangssignals wieder auf Null springt. Doch auch hier muß eine Voraussetzung eingehalten werden: Die Kurve muß für einen Anfangszeitpunkt t_0 wieder im Ursprung beginnen. Dann kann auch hier der Betrag des Maximums von N_y nie den Betrag des Maximums von v_y überschreiten.

Ebenso die Nichtlinearitäten nach den Bildern 14 und 15: Auch dort muß eine „Neukurve“ existieren, die im Ursprung beginnt.

Wir sehen also, daß sich eine bedeutende Klasse von Nichtlinearitäten (besonders solche mit Hysterese) mit dem Stabilitätssatz 3.1 behandeln lassen, bei denen eine Bearbeitung mit dem Kreiskriterium gar nicht möglich ist. Dieser Vorteil mag vielleicht dazu geeignet sein, den Nachteil bei der Bestimmung von (3.4) aufzuheben.

3.1.1 System 2. Ordnung mit Totzeit

Das lineare System Γ sei ein System 2. Ordnung und werde durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) := \frac{0,5}{s^2 + s + 1} \quad (3.10)$$

definiert. Das Teilsystem N sei ein Totzeitglied

$$(Ny)(t) := y(t-T) \quad (3.11)$$

mit unbekannter oder sogar zeitabhängiger Totzeit $T = T(t)$ (z.B. verursacht durch eine zeitabhängige Strömungsgeschwindigkeit in einem Rohr).

Die L_∞ -Norm von Systemen 2. Ordnung ist in Abschnitt 2.1.1 berechnet worden. Schreiben wir (3.10) in der Normalform (2.22), ergibt sich $b = 0$, $c = 1$, $d = 0,5$ mit einem zusätzlichen Vorfaktor von 0,5. Die Norm läßt sich entweder (2.33) oder dem Bild 6 entnehmen:

$$|\Gamma|_\infty = 0,5 \cdot 1,39 = 0,69 = \gamma \quad (3.12)$$

Die Norm des Totzeitgliedes ist 1:

$$|N|_\infty = 1 = \nu \quad (3.13)$$

Nach Satz 3.1 ist das System L_∞ -stabil, da

$$\alpha = \gamma\nu = 0,69 \leq 1 \quad (3.14)$$

und es gelten die Abschätzungen

$$\frac{|u|_\infty}{|r|_\infty} \leq \frac{1}{1-\alpha} = 3,28 \quad (3.15)$$

und
$$\frac{|y|_\infty}{|r|_\infty} \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} = 2,28 \quad (3.16)$$

Als Vergleich zu diesem Ergebnis ist das maximal mögliche Verhältnis $|y|_{\infty}/|r|_{\infty}$ in Bild 16 dargestellt (numerische Berechnung). Dabei wurden aber nur konstante Totzeiten berücksichtigt; das Übertragungsverhältnis ist über der Totzeit aufgetragen. Werden auch zeitabhängige Totzeiten zugelassen, können die dargestellten Werte noch überschritten werden. Der Maximalwert kann dann sogar den Wert der Abschätzung nach (3.15) bzw. (3.16) erreichen.

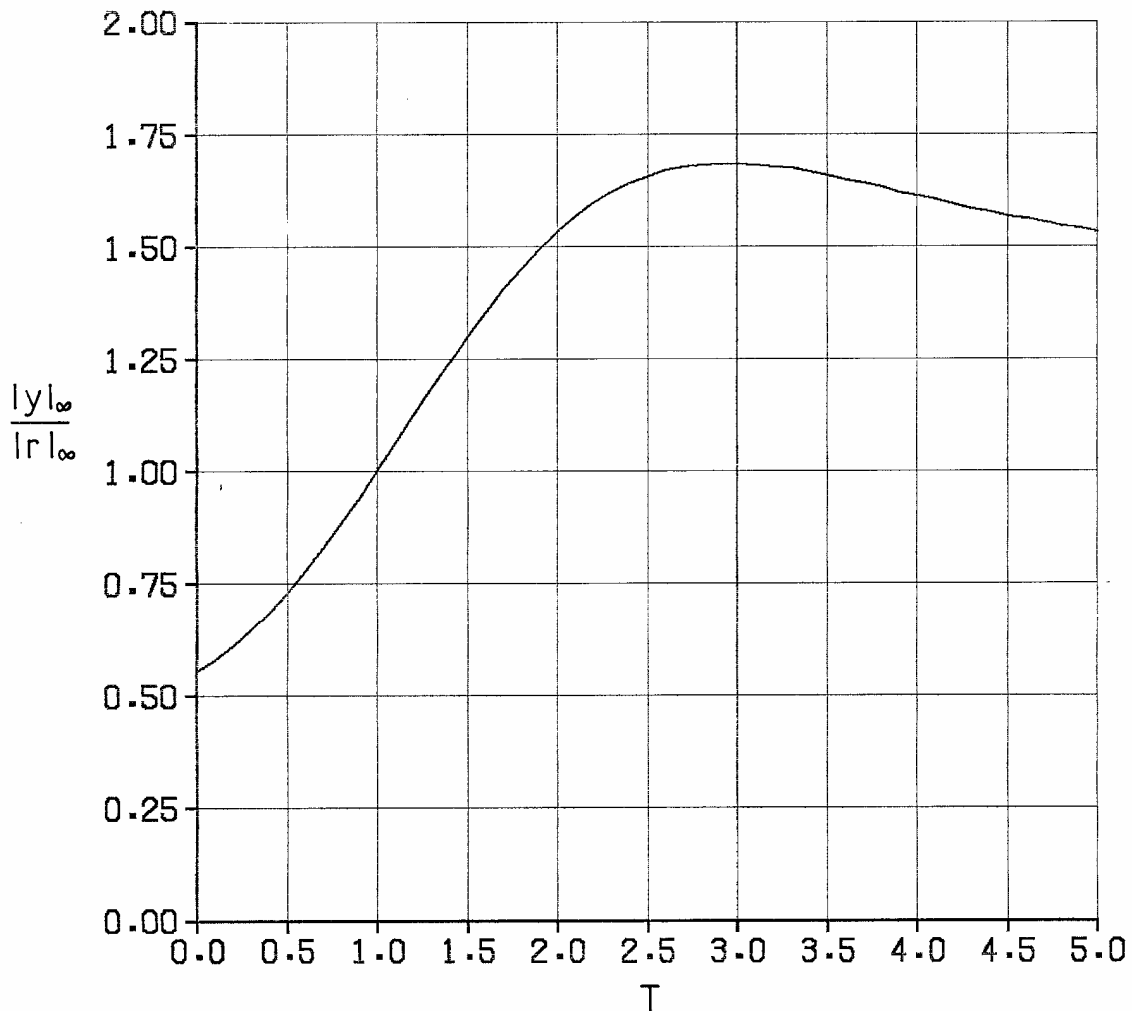


Bild 16

3.1.2 Kupplungsstangenantrieb

Kupplungsstangenantriebe (z.B. bei Lokomotiven) sind Systeme mit zeitveränderlichen Parametern, da die Drehfedersteifigkeit von der Stellung der Kupplungsstangen abhängt. Rotiert der Motor mit konstanter Drehzahl, so ändert sich die Drehfedersteifigkeit bei dem Antrieb nach Bild 17 mit zwei um $\pi/2$ versetzten Kupplungsstangen mit der doppelten Frequenz. Vergleiche [M1], S. 128.

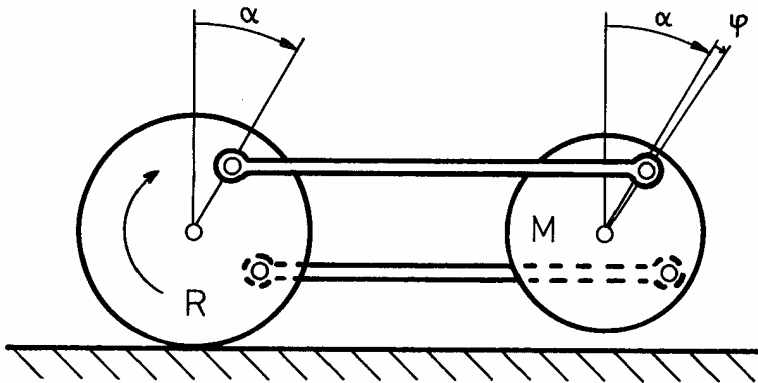


Bild 17

Ist ϕ der Relativwinkel zwischen Rad und Motor, so können wir die Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\phi} + 2D\dot{\phi} + \hat{C}(t)\phi = M(t) \quad (3.17)$$

angeben. J ist das Trägheitsmoment, D die Dämpfung und $\hat{C}(t)$ die zeitabhängige Drehfedersteifigkeit, für die wir den Ansatz

$$\hat{C}(t) = C + C'(t) \quad (3.18)$$

machen. Für C' gelte dabei die Abschätzung

$$|C'(t)| \leq v \quad . \quad (3.19)$$

$M(t)$ ist schließlich das aufgedrückte Moment.

Wir formen (3.17) um in

$$J\ddot{\phi} + 2D\dot{\phi} + C\phi = M(t) - C'(t)\phi \quad . \quad (3.20)$$

(3.20) können wir in die Struktur von Bild 1 bringen. Dann ist das System Γ durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + 2Ds + C} \quad (3.21)$$

gegeben und der Operator N durch

$$(Ny)(t) = C'(t)y(t) \quad (3.22)$$

und $r = M$, $y = \phi$, $u = M - C'\phi$. (3.23)

Bringen wir (3.21) auf die Normalform (2.22), so wird

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} \quad , \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = \frac{D}{J\omega_0} \quad (3.24)$$

mit einem Vorfaktor $\frac{1}{C}$.

Die L_∞ -Norm von Γ entnehmen wir wieder (2.33) oder Bild 6.

Nehmen wir einige Zahlenwerte:

$$J = 1 \quad , \quad D = 0,2 \quad , \quad C = 1 \quad \rightarrow$$

$$\omega_0 = 1 \quad , \quad d = 0,2 \quad , \quad \hat{r} = \sqrt{1-d^2} = 0,98 \quad (3.25)$$

und $C'(t) = 0,2 \sin 2\hat{r}\omega_0 t$. (3.26)

Es entsteht eine gedämpfte Mathiesche Differentialgleichung. Mit den Zahlenwerten folgt

$$|\Gamma|_{\infty} = 3,22 = \gamma \quad , \quad (3.27)$$

$$|N|_{\infty} = 0,2 = \nu \quad . \quad (3.28)$$

Das System ist nach Satz 3.1 L_{∞} -stabil, da

$$\alpha = \gamma\nu = 0,64 < 1$$

und es ist

$$\frac{|u|_{\infty}}{|r|_{\infty}} \leq 2,82 \quad , \quad (3.29)$$

$$\frac{|y|_{\infty}}{|r|_{\infty}} = \frac{|\phi|_{\infty}}{|M|_{\infty}} \leq 9,10 \quad . \quad (3.30)$$

Bild 18 zeigt das tatsächliche Verhalten mit den eingesetzten Zahlenwerten. Die Eingangsfunktion $r = M$ wurde so gewählt, daß die größtmögliche Aussteuerung für y erreicht wird (Maximumprinzip von Pontrjagin, s. [A1]). Danach ergibt sich maximal ein Wert von

$$\frac{|\phi|_{\infty}}{|M|_{\infty}} = 4,31 \quad . \quad (3.31)$$

(3.30) überschätzt diesen Wert etwa um den Faktor 2.

Nimmt C' nun statt (3.26) die Form

$$C'(t) = 0,2 \operatorname{sign}(\sin 2\hat{f}\omega_0 t) \quad (3.32)$$

an (Meißnersche Differentialgleichung), so gelten dieselben Abschätzungen (3.29), (3.30). Die Simulation (Bild 19) ergibt hier ein maximales Verhältnis von

$$\frac{|\phi|_{\infty}}{|M|_{\infty}} = 4,82 \quad . \quad (3.33)$$

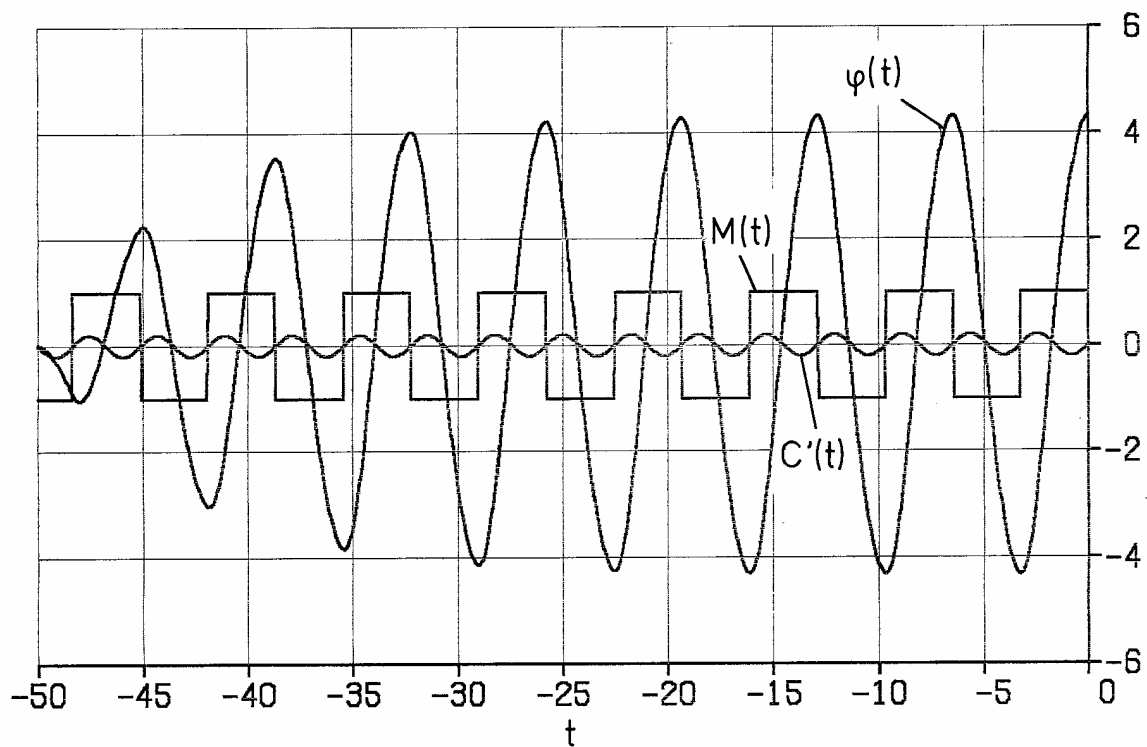


Bild 18

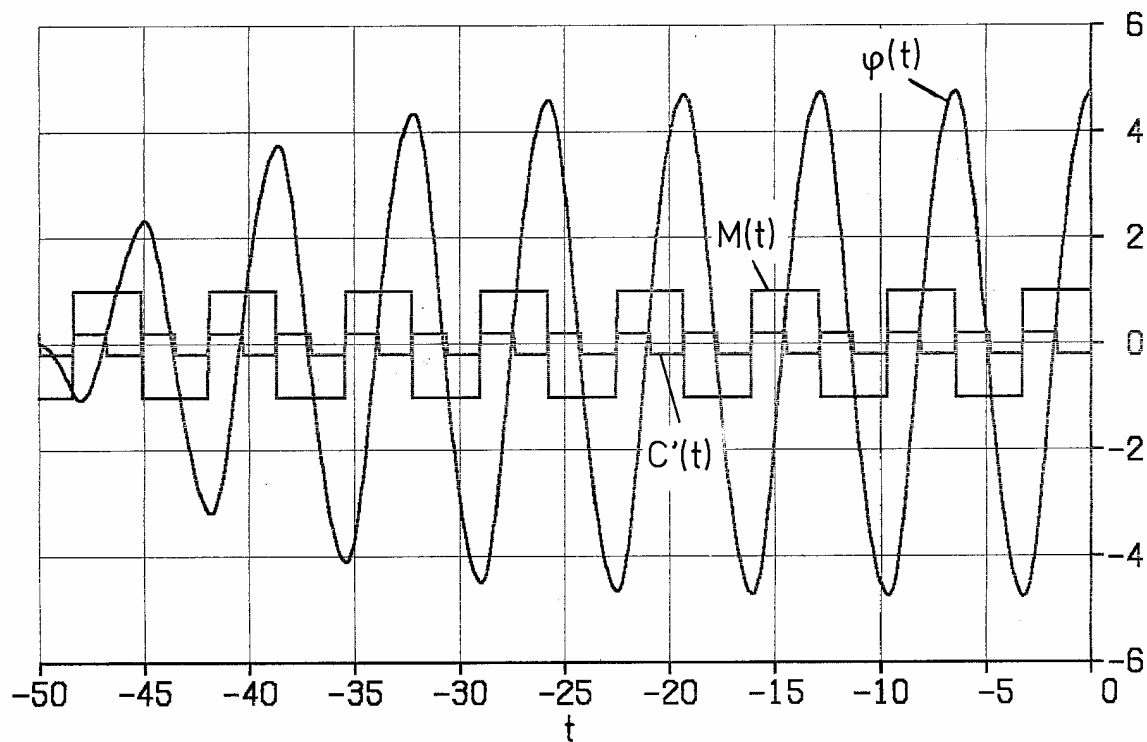


Bild 19

3.1.3 Kursregelung bei Schiffen

Bei großen Tankern und Frachtschiffen liegt der Sinn einer Kursregelung (Autopilot) nicht nur in einer Entlastung des Rudergängers sondern hat auch starke ökonomische Bedeutung: Ein Schiff weicht durch äußere Einflüsse wie Wind, Wellen und Strömungen ständig von seinem Sollkurswinkel ab, es giert. Setzt man einen energieoptimalen Regler ein, so ist bei Schiffen in der Größenordnung von einigen hunderttausend Tonnen Verdrängung die Einsparung an Kraftstoff so groß, daß sich ein für die Regelung an Bord installierter Prozessrechner in kürzester Zeit amortisiert.

Hier sei ein einfaches Schiffsmodell vorgestellt (vgl. zu dem gesamten Abschnitt [A3]):

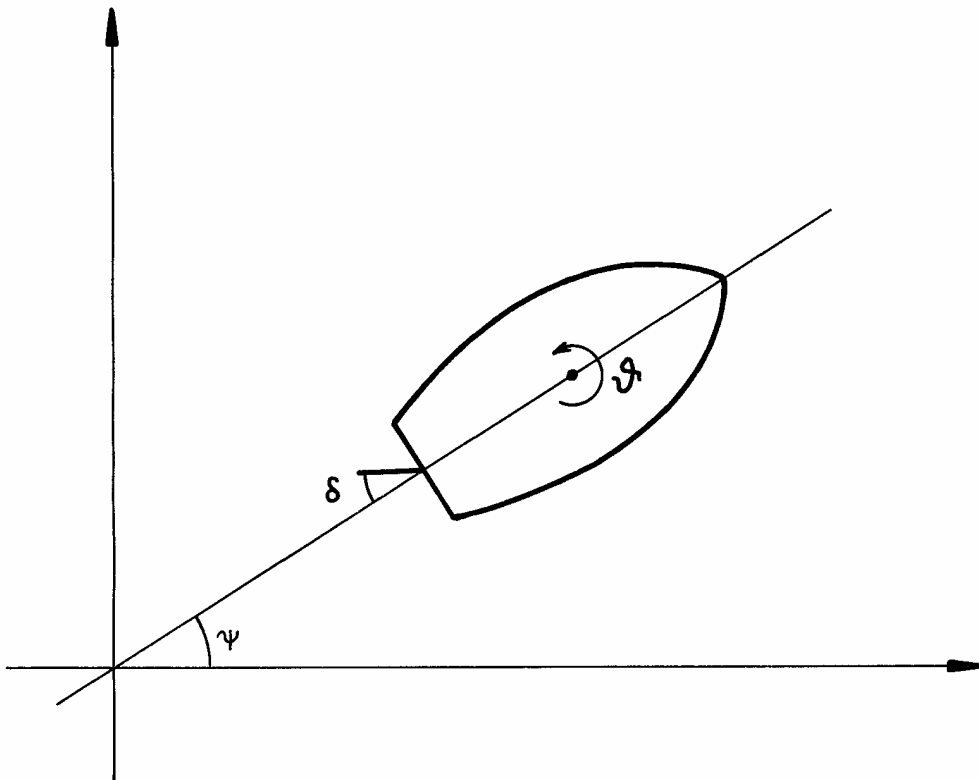


Bild 20

$$\dot{\theta} = -f(\theta) + K\delta + v \quad (3.34)$$

$$\dot{\psi} = \theta \quad (3.35)$$

ψ ist der augenblickliche Kurswinkel, δ gibt den Winkel des Ruders an und θ ist die Gierrate, die Winkelgeschwindigkeit um die Schiffshochachse. Die Größe v faßt Störungen in Form von Wind und Wellen zusammen. Die Funktion f ist nicht-linear und gibt das Reaktionsmoment aufgrund der Gierrate θ an. Für den stationären Zustand ($\dot{\theta} = 0, v = 0$) wird durch f der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit θ und dem Ruderwinkel δ angegeben:

$$\delta = \frac{1}{K} f(\theta) \quad (3.36)$$

Bild 21 stellt diesen Zusammenhang grafisch dar.

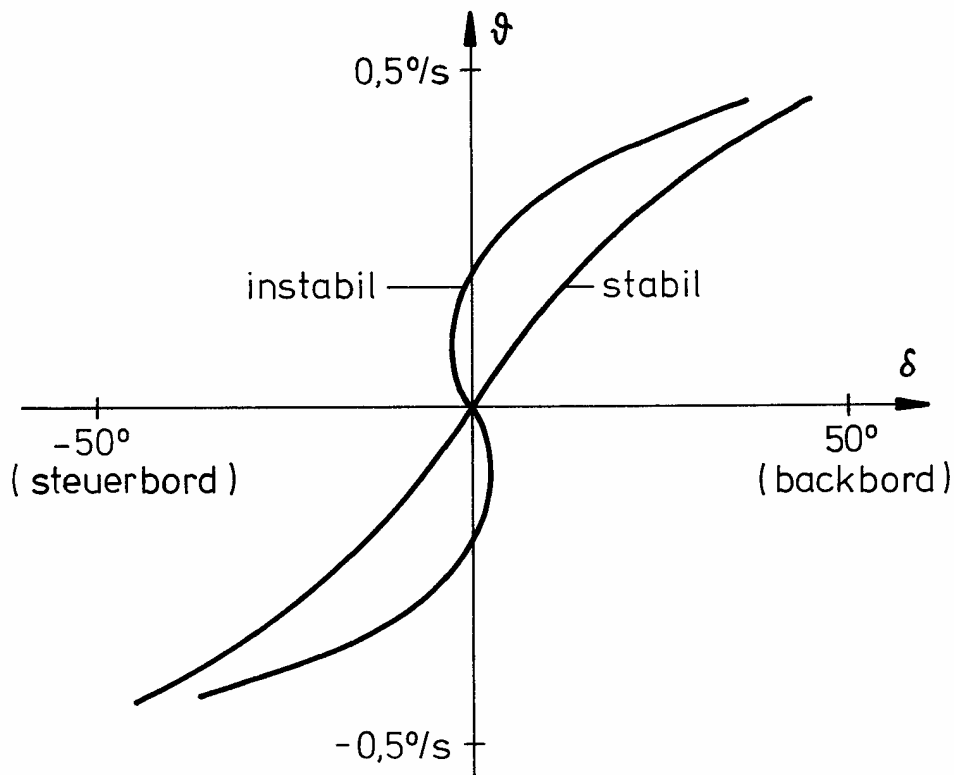


Bild 21

Die Kennlinie verändert sich bei verschiedenen Betriebszuständen verursacht durch unterschiedliche Ladung, Trimmung (Verteilung der Ladung), oder Geschwindigkeit. Bei bestimmten Betriebszuständen gibt es für den Wert $\delta = 0$ drei Werte für θ . Dabei entspricht $\theta = 0$ einem instabilen Zustand (das linearisierte Modell ist instabil). Obwohl das Ruder mit-schiffs steht, fährt dann das Schiff im stationären Zustand nicht geradeaus sondern weicht nach backbord oder steuerbord aus. Schon wegen diesem Umstand ist eine automatische Stabilisierung der Vorfahrt nötig, da dies kaum dem Rudergänger zugemutet werden kann.

Eine Möglichkeit der Stabilisierung ist die mit einem Zustandsregler:

$$\delta = -k_1(\psi - \psi_0) - k_2\theta \quad . \quad (3.37)$$

ψ_0 ist der Sollkurswinkel. Es handelt sich im wesentlichen um eine Festwertregelung, da ψ_0 nur bei Manövern verändert wird. Mit dem Regler wird das Gesamtsystem zu

$$\dot{\theta} = -f(\theta) - k'_1\psi + k'_1\psi_0 - k'_2\theta + v \quad , \quad (3.38)$$

$$\dot{\psi} = \theta \quad (3.39)$$

mit $k'_1 := Kk_1$, $k'_2 := Kk_2$. (3.40)

Jetzt wollen wir eine Abschätzung für den Kurswinkel ψ in Abhängigkeit vom Sollkurswinkel ψ_0 einerseits und in Abhängigkeit der Störfunktion v andererseits gewinnen.

Wir nehmen an, daß sich $f(\theta)$ abschätzen läßt durch

$$|f(\theta)| \leq v |\theta| \quad . \quad (3.41)$$

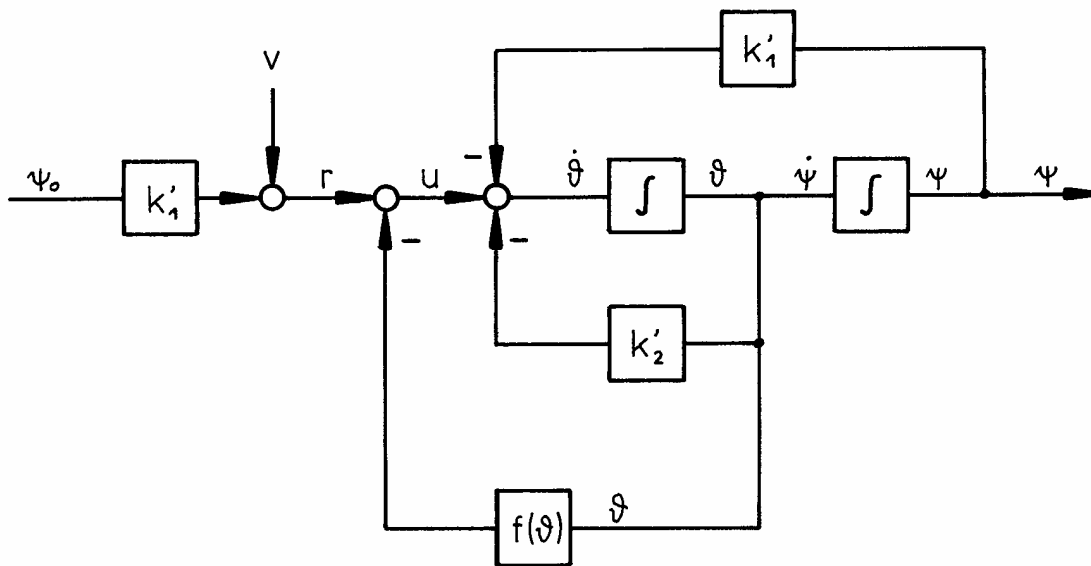


Bild 22: Strukturbild des Regelkreises (3.38), (3.39). Der Ruderwinkel δ tritt hier nicht mehr direkt auf, weil das Bild so gezeichnet wurde, daß die Möglichkeit der Aufspaltung des Regelkreises in ein lineares und ein nichtlineares Teilsystem nach der Struktur des Bildes 1 deutlich wird. Den Größen r und u kommt keine physikalische Bedeutung zu.

Nun gilt

$$G_{\theta}(s) := \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2 + k'_2 s + k'_1} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\frac{s}{\omega_0}}{1 + 2d \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}, \quad (3.42)$$

$$G_{\psi}(s) := \frac{\Psi(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + k'_2 s + k'_1} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + 2d \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (3.43)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k'_1}$, $d = \frac{k'_2}{2\omega_0}$. (3.44)

Nach Abschnitt 2.1.1 gibt es Abschätzungen

$$|\Gamma_{\theta}|_{\infty} \leq \gamma_{\theta} \quad , \quad |\Gamma_{\psi}|_{\infty} \leq \gamma_{\psi} \quad . \quad (3.45)$$

Wenn nun gilt

$$v\gamma_\theta < 1 \quad , \quad (3.46)$$

so ist das System nach Satz 2.1 L_∞ -stabil und weiter folgt

$$\frac{|u|_\infty}{|r|_\infty} \leq \frac{1}{1 - v\gamma_\theta} \quad . \quad (3.47)$$

Nach (3.45) existiert auch für Γ_ψ eine Schranke, so daß wir damit den Winkel ψ abschätzen können:

$$\frac{|\psi|_\infty}{|r|_\infty} = \frac{|u|_\infty}{|r|_\infty} \frac{|\psi|_\infty}{|u|_\infty} \leq \frac{\gamma_\psi}{1 - v\gamma_\theta} \quad . \quad (3.48)$$

Setzen wir eine der Eingangsfunktionen ψ_0 oder v Null, so erhalten wir Abschätzungen des Winkels ψ in Abhängigkeit der jeweils anderen Eingangsfunktion:

$$v = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{|\psi|_\infty}{|\psi_0|_\infty} \leq \frac{k_1' \gamma_\psi}{1 - v\gamma_\theta} \quad . \quad (3.49)$$

$$\psi_0 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{|\psi|_\infty}{|v|_\infty} \leq \frac{\gamma_\psi}{1 - v\gamma_\theta} \quad . \quad (3.50)$$

Nun ein Zahlenbeispiel (vergleiche die Werte in [A3]):

$$K = 2 \cdot 10^{-4} \quad , \quad k_1 = 4 \quad , \quad k_2 = 200 \quad \rightarrow$$

$$k_1' = 8 \cdot 10^{-4} \quad , \quad k_2' = 4 \cdot 10^{-2} \quad \rightarrow$$

$$\omega_0 = 2,8 \cdot 10^{-2} \quad , \quad d = 0,707 \quad ;$$

$$v = 1 \cdot 10^{-2} \quad (3.51)$$

Die Werte sind auf 1s bezogen. Die Zeitkonstante $T = 1/\omega_0$ beträgt hier also 35,7s.

Nach Abschnitt 2.1.1 erhalten wir für die Normen (auch aus den Bildern 6 und 7 abzulesen):

$$|\Gamma_\theta|_\infty = \frac{1}{2,8 \cdot 10^{-2}} \cdot 0,95 = 33,7 = \gamma_\theta \quad (3.52)$$

und
$$|\Gamma_\psi|_\infty = \frac{1}{8 \cdot 10^{-4}} \cdot 1,09 = 1,36 \cdot 10^3 = \gamma_\psi \quad (3.53)$$

Nach (3.49), (3.50) gilt dann

$$\frac{|\psi|_\infty}{|\psi_0|_\infty} \leq 1,64 \quad , \quad (3.54)$$

$$\frac{|\psi|_\infty}{|v|_\infty} \leq 2,06 \cdot 10^3 \quad . \quad (3.55)$$

Wegen des integrierenden Verhaltens der Strecke sind additive Konstanten im Führungswinkel ψ_0 ohne Bedeutung. Ein Sprung von 0 auf $\Delta\psi_0$ entspricht daher einem von $-\Delta\psi_0/2$ auf $\Delta\psi_0/2$. Dann bleibt ψ nach (3.54) im Bereich $[-0,82\Delta\psi_0, 0,82\Delta\psi_0]$. Das heißt aber, beim Führungssprung um $\Delta\psi_0$ kann ψ höchstens um $0,32\Delta\psi_0$ über den stationären Endwert überschwingen:

$$\psi_0(t) \in [0, \Delta\psi_0] \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \rightarrow$$

$$\psi(t) \in [-0,32\Delta\psi_0, 1,32\Delta\psi_0] \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \quad (3.56)$$

Das Bild 23 zeigt die Antwort auf einen Sollkurswinkelsprung. Für die Funktion f (vgl. (3.36), Bild 21) wurde dabei der Zusammenhang

$$f(\theta) = -0,01\theta + \frac{1}{25^\circ} \theta |\theta| \quad (3.57)$$

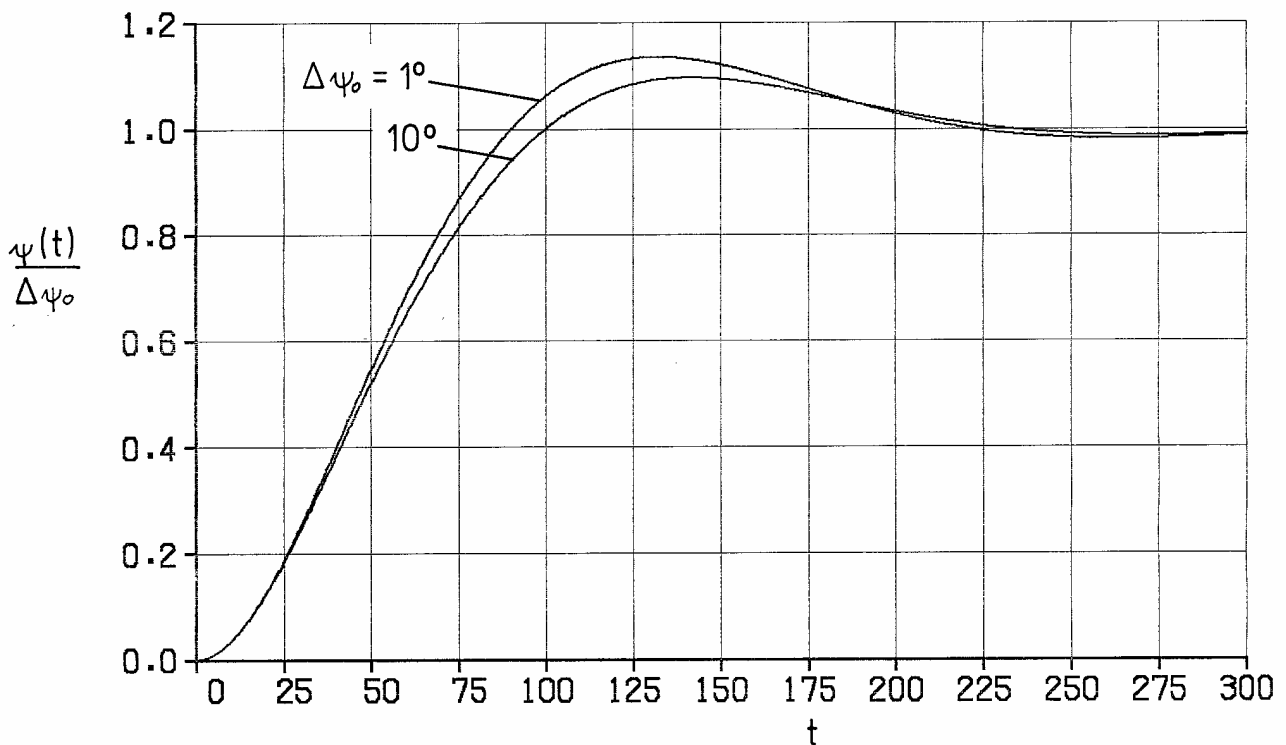
angenommen. Zwar gilt dann die Abschätzung (3.41) mit $v = 0,01$ nur für $|\theta| \leq 0,5^\circ/\text{s}$; es zeigt sich aber, dass dieser Bereich bei den simulierten Sprüngen nicht verlassen wird womit die Ergebnisse vergleichbar bleiben.

Da das System nichtlinear ist, fällt die Sprungantwort bei verschieden großen Sprüngen unterschiedlich aus. Bei einer

Sollkursänderung von $\Delta\psi_0 = 1^\circ$ haben wir ein maximales Überschwingen von $0,13\Delta\psi_0$. Bei $\Delta\psi_0 = 10^\circ$ schwingt der Kurswinkel ψ dagegen nur um $0,10\Delta\psi_0$ über. Nach (3.56) wird das Überschwingen etwa um den Faktor 2,5 überschätzt.

Man muß jedoch bedenken, daß der Vergleich mit einer Sprungantwort nicht sehr günstig ausfallen kann, da die Abschätzung mittels L_∞ -Norm eine viel größere Klasse von Eingangsfunktionen zuläßt als die Sprungfunktion. Denkbar wären mehrere schnelle Sollkurswinkeländerungen hintereinander verursacht durch einen unerfahrenen Rudergänger oder durch außergewöhnliche äußere Umstände.

Weiterhin ist die nichtlineare Funktion f sehr „gutmütig“. Bei starkem Ausschlag von θ wirkt der nichtlineare Anteil nämlich noch zusätzlich dämpfend, was auch das geringere Überschwingen beim Sprung um $\Delta\psi_0 = 10^\circ$ gegenüber dem von 1° erklärt.



Nun zur Störgröße v . Bei einer Windgeschwindigkeit von $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (entspricht einer Windstärke von 5 bis 6 Beaufort) ergibt sich für v ein typischer Wert von

$$v \approx 9 \cdot 10^{-6} \quad . \quad (3.58)$$

Nach (3.55) erhalten wir eine maximale Kursabweichung von

$$|\Delta\psi|_{\infty} \leq 0,018 = 1^{\circ} \quad . \quad (3.59)$$

Nach (3.38), (3.39) kann man $\Delta\psi$ bei der angegebenen Störgröße auch durch stationäre Rechnung ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$) nähern und erhält

$$\Delta\psi \approx \frac{v}{k_1} = 0,011 = 0,6^{\circ} \quad . \quad (3.60)$$

Der Wert (3.60) stellt mit Sicherheit eine untere Schranke dar, da der Wind nicht stationär ist, sondern im Gegenteil auch sehr böig sein kann (kurzfristige starke Schwankungen). Deshalb kann man (3.59) als brauchbare Abschätzung ansehen.

3.2 L_∞ -Stabilität begründet durch die L_2^a -Stabilität

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß bei Systemen nach der Struktur des Bildes 1 die L_2^a -Stabilität die L_∞ -Stabilität impliziert.

Zunächst jedoch zur L_2^a -Stabilität selbst, wir gelangen zu dem bekannten Kreiskriterium (Abschnitt 3.2.1).

Danach wird das Integral des Betragsquadrats der Übertragungsfunktion G vorbereitend für 3.2.3 gelöst.

In 3.2.3 werden dann die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Teilabschnitte schließlich zur Herleitung der L_∞ -Stabilität verwandt. Der Abschnitt 3.2.4 enthält Beispiele.

3.2.1 Stabilität im Raum L_2^a

Auch für den Raum L_2^a läßt sich nun aufgrund des allgemeinen Stabilitätssatzes 1.6 (mit Vermutung 1.7) sofort ein Stabilitätskriterium angeben (Kreiskriterium). Wir verwenden die L_2^a -Norm nach Abschnitt 2.2.

Satz 3.2 (L_2^a -Stabilität nichtlinearer Systeme):

Es liege der Standardregelkreis nach Bild 1 vor:

$$y = \Gamma u \quad , \quad (3.61)$$

$$u = r - Ny \quad . \quad (3.62)$$

Γ erfüllt die Bedingung (1.46); Γ ist nicht sprunghaft. Die Gewichtsfunktion g ist in Form ihrer Laplacetransformierten, der Übertragungsfunktion $G = \mathcal{L}g$, angegeben. In dem Gebiet $\operatorname{Re}(s) \geq a$ sei $G(s)$ regulär, dann ist Γ Operator auf L_2^a . Für die Übertragungsfunktion G gebe es eine Schranke $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$ im Gebiet $s = j\omega - a$,

$$|G(s)| \leq \gamma \quad . \quad (3.63)$$

Die Norm des nichtlinearen Operators N läßt sich mit einem $\nu \in \mathbb{R}_0^+$ abschätzen,

$$\|N\|_2^a \leq \nu \quad , \quad (3.64)$$

oder N erfülle die Sektorbedingung

$$|(Ny)(t)| \leq \nu |y(t)| \quad (3.65)$$

für alle y . Wenn gilt

$$\alpha := \gamma\nu < 1 \quad (3.66)$$

ist das System (3.61), (3.62) L_2^a -stabil und es folgen die Abschätzungen

$$\frac{\|u\|_2^a}{\|r\|_2^a} \leq \frac{1}{1-\alpha} \quad , \quad (3.67)$$

$$\frac{\|y\|_2^a}{\|r\|_2^a} \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} \quad . \quad (3.68)$$

Beweis:

Ist Γ ein Operator auf L_2^a , was durch die Regularität von G in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq a$ gesichert ist, gilt für die Norm von Γ in Raum L_2^a nach Abschnitt 2.2

$$\|\Gamma\|_2^a = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} |G(j\omega - a)| \quad .$$

Wegen Voraussetzung (3.63) ist also

$$\|\Gamma\|_2^a \leq \gamma$$

Weiter existiert eine Schranke für N ,

$$\|N\|_2^a \leq \nu$$

da (3.65) \rightarrow (3.64).

Dann ist Satz 1.6 (mit Vermutung 1.7) anwendbar. Es folgt die Stabilität und dann die Abschätzungen (3.67), (3.68).

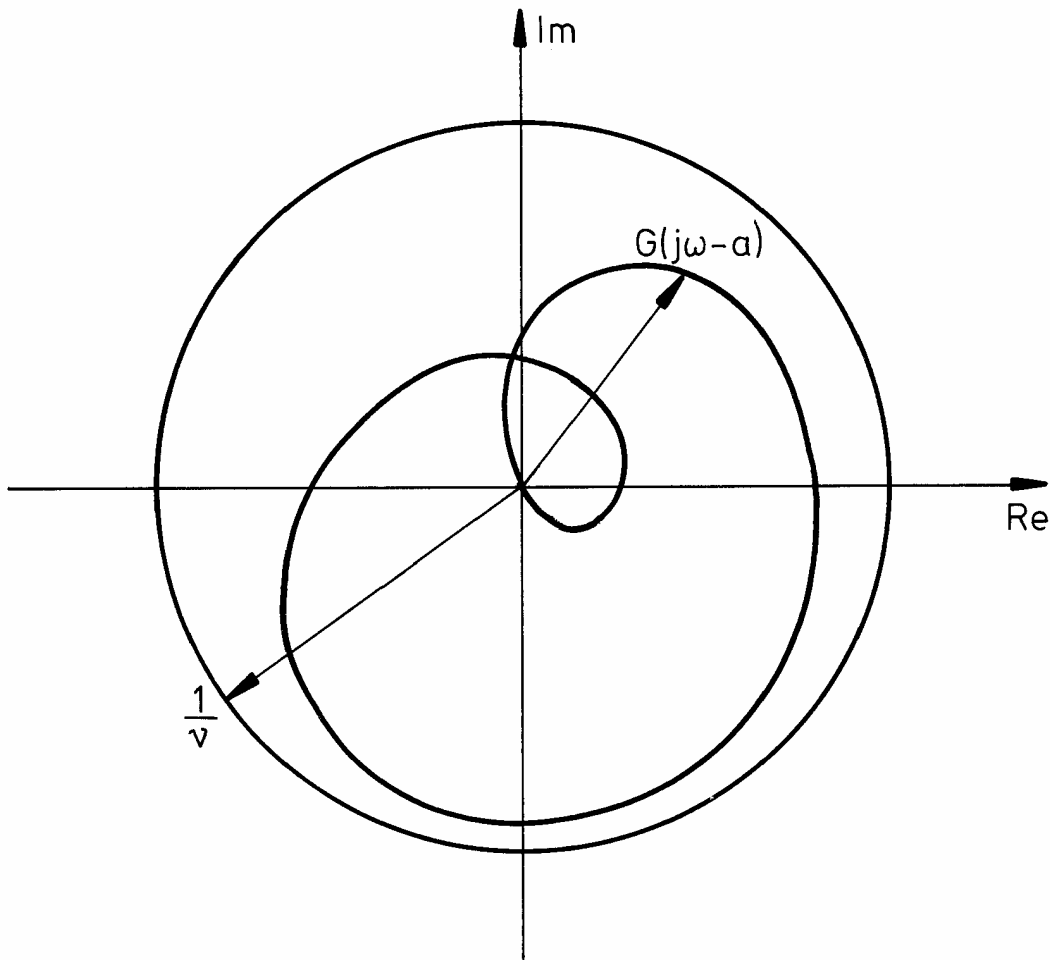


Bild 24: Grafische Interpretation der Bedingungen (3.63), (3.64) und (3.66). Bleibt die Ortskurve von $G(j\omega-a)$, $\omega \in \mathbb{R}$, innerhalb des Kreises mit Radius $1/v$, so ist das Produkt der Schranken γ und v immer kleiner 1, was der Satz 3.2 fordert. Der Kreis darf nicht berührt werden. Die Ortskurve hat im allgemeinen Fall ein beliebiges Aussehen, nur bei Systemen mit reeller Gewichtsfunktion besteht sie aus zwei zueinander konjugiert komplexen Teilen. In diesem Fall genügt das Zeichnen von $G(j\omega-a)$ für $\omega \in \mathbb{R}_0^+$.

In Satz 3.2 ist die recht allgemeine Forderung (3.64) enthalten. Das bekannte Kreiskriterium läßt dagegen nur Sektorfunktionen (3.65) zu. Viele Nichtlinearitäten, die keine Sektorfunktionen sind, erfüllen aber dennoch die allgemeine Forderung (3.64).

Im Raum L_2 sind dies die sogenannten „passiven Systeme“. Passive Systeme sind solche, die ihre gesamte Energie nur aus der Eingangsfunktion beziehen; sie haben keine weiteren Energiequellen. Dann kann die Energie der Ausgangsfunktion niemals die der eingespeisten Energie übersteigen (abgesehen von Konstanten hervorgerufen durch unterschiedliche Normierungen). Voraussetzung ist aber, daß die Nichtlinearität zu einem Anfangszeitpunkt energiefrei ist. Daraus folgt dann sofort die Existenz einer Schranke v . Im Raum L_2^a ist zusätzlich ein Abklingen vorhandener Energie mit einer Zeitkonstanten kleiner a nötig.

Vergleicht man diese Nichtlinearitäten mit denen, die im Raum L_∞ eine Schranke haben (Abschnitt 3.1), so stellt man fest, daß es sich um recht unterschiedliche Klassen handelt (bis auf die beiden Klassen gemeinsamen Sektorfunktionen). Wünscht man für einen nichtlinearen Regelkreis nur irgendeine Aussage über die Stabilität, so könnte man entsprechend der vorliegenden Nichtlinearität den jeweils günstigsten Raum wählen (L_∞ oder L_2) und erhält dann mit Satz 3.1 oder 3.2 die L_∞ oder die L_2 -Stabilität.

3.2.2 Integral des Betragsquadrats der Übertragungsfunktion

Bei der Begründung der L_∞ -Stabilität durch das Kreiskriterium wird das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.69)$$

auftreten. Es soll hier eine Möglichkeit für die rekursive Berechnung dieses Integrals angegeben werden (vgl. [A2], S. 128ff, [K1], S. 68ff). Dazu müssen wir uns bei der Übertragungsfunktion G auf reelle gebrochene rationale Funktionen einschränken:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.70)$$

Zusätzlich muß der Grad des Polynoms B kleiner sein als der von A (echt gebrochene rationale Funktion).

G soll in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ regulär sein; d.h. alle Pole (Nullstellen von A) liegen in der linken offenen Halbebene $\operatorname{Re}(s) < 0$. Dann ist Γ Operator auf L_2 .

Das Integral erhält dann folgendes Aussehen:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(j\omega) B(-j\omega)}{A(j\omega) A(-j\omega)} d\omega \quad (3.71)$$

oder

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{B(s) B(-s)}{A(s) A(-s)} ds \quad (3.72)$$

Der Integrationsweg C ist die imaginäre Achse.

Im folgenden werden wir vielfach vom Residuensatz der Funktionentheorie Gebrauch machen. Zuerst ändern wir aber den Integrationsweg C der besseren Handhabung in eine geschlossene Kontur um:

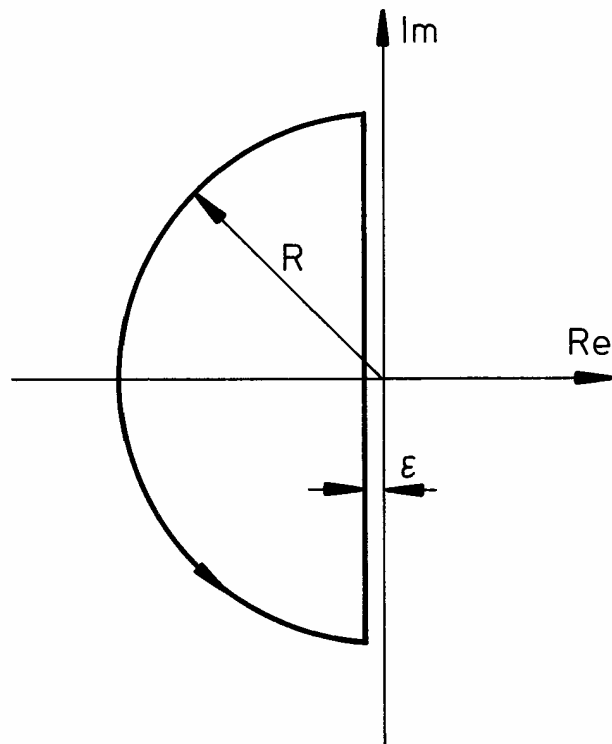


Bild 25: Der Integrationsweg C_1

Das Integral entlang C_1 liefert den gleichen Wert wie das Integral entlang C , sofern nur R und ϵ so gewählt werden, daß alle Nullstellen von A innerhalb der Kontur C_1 liegen. Führen wir nämlich den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ durch, so strebt der Beitrag der Integration entlang des linken Halbkreises gegen 0, da der Nennergrad des Integranden von (3.72) mindestens um 2 größer ist als der Zählergrad. Für große R nimmt der Integrand dann mit $1/R^2$ ab. Die Länge des Integrationsweges längs des Halbkreises nimmt aber nur linear zu. Deshalb dürfen wir den Integrationsweg C in (3.72) unbeschadet mit einem unendlich großen Halbkreis schließen. Nach dem Residuensatz der Funktionentheorie ist aber das Integral entlang einer geschlossenen Kontur über eine Funktion, die überall regulär bis auf endlich viele Punkte ist, unabhängig von der Kontur selbst und hängt nur von den Residuen der eingeschlossenen Singularitäten ab. Deshalb dürfen wir (3.72)

durch

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B(s) B(-s)}{A(s) A(-s)} ds \quad (3.73)$$

ersetzen. Wir können immer ein geeignetes R und ε finden.

Ist n der Grad von A , so schreiben wir jetzt für A auch A_n und für B auch B_n . Dadurch erhalten wir für A bzw. B und den unten definierten „Abbaupolynomen“ A_k bzw. B_k eine einheitliche Schreibweise.

$$A_k(s) = a_k^0 s^k + a_k^1 s^{k-1} + a_k^2 s^{k-2} + \dots, \quad (3.74)$$

$$B_k(s) = b_k^1 s^{k-1} + b_k^2 s^{k-2} + \dots. \quad (3.75)$$

Die Hochzahlen an den Koeffizienten a und b sind Indizes; sie sind keine Exponenten.

Das Polynom A_k wird nun in gerade und ungerade Potenzen aufgespalten:

$$A_k(s) = A_k'(s) + A_k''(s) \quad (3.76)$$

mit

$$A_k'(s) = a_k^0 s^k + a_k^2 s^{k-2} + \dots = \frac{1}{2} \left[A_k(s) + (-1)^k A_k(-s) \right] \quad (3.77)$$

$$A_k''(s) = a_k^1 s^{k-1} + a_k^3 s^{k-3} + \dots = \frac{1}{2} \left[A_k(s) - (-1)^k A_k(-s) \right] \quad (3.78)$$

Sei nun

$$\alpha_k = \frac{a_k^0}{a_k^1} \quad (3.79)$$

und

$$\beta_k = \frac{b_k^1}{a_k^1}, \quad (3.80)$$

so definieren wir damit die „Abbaupolynome“ durch die Rekursion

$$A_{k-1}(s) := A_k(s) - \alpha_k s A_k''(s) \quad , \quad (3.81)$$

$$B_{k-1}(s) := B_k(s) - \beta_k A_k''(s) \quad . \quad (3.82)$$

Der Grad der Polynome wird durch jeden Rekursionsschritt weiter abgebaut.

In der Form der Rekursionsvorschrift (3.81) erkennen wir den Routhschen Algorithmus (vgl. [Z2], S. 98ff). Deshalb können wir sogleich die Aussage übernehmen: Hat das Polynom $A = A_n$ laut Voraussetzung nur Polstellen mit $\text{Re}(s) < 0$ (A_n ist Hurwitzpolynom), so gilt dies ebenso für alle Abbaupolynome A_k , $k < n$.

Bei einem Hurwitzpolynom A_k haben dann aber weiter die Polynome A_k' und A_k'' nur einfache Nullstellen auf der imaginären Achse. Dies läßt sich z.B. dem Ortskurvenkriterium nach Cremer-Leonhard (s. [Z2], S. 95ff) entnehmen, dessen Algebraisierung wiederum das Routh-Kriterium ist: Bei einem Hurwitzpolynom A_k umrundet die Ortskurve von $A_k(j\omega)$ den Ursprung mit einem Winkel von $k\pi$. Da aber der Real- und Imaginärteil von $A_k(j\omega)$ durch $A_k'(j\omega)$ und $A_k''(j\omega)$ gegeben sind (oder umgekehrt, je nachdem ob k gerade oder ungerade), darf keine Nullstelle von A_k' und A_k'' außerhalb der imaginären Achse liegen, da sonst keine Winkeldrehung um $k\pi$ erreichbar wäre. Weiterhin können die Nullstellen von A_k' und A_k'' nur einfach sein. Den gesamten Sachverhalt macht man sich am besten anhand eines Beispiels einer Ortskurve klar.

Vergleichen wir jetzt die Funktionen

$$f_1(s) := \frac{B_{k-1}(s) B_{k-1}(-s)}{A_{k-1}(s) A_{k-1}(-s)} \quad (3.83)$$

und

$$f_2(s) := \frac{B_{k-1}(s) B_{k-1}(-s)}{A_{k-1}(s) 2 A_k''(-s)} \quad . \quad (3.84)$$

Im Innern der Kontur C_1 haben f_1 und f_2 die gleichen Pole s_i (die Nullstellen von A_{k-1}) und sogar die gleichen Residuen. Es gilt nämlich an den Stellen s_i mit (3.78), (3.81):

$$\begin{aligned} 2 A_k''(-s_i) &= A_k(-s_i) - (-1)^k A_k(s_i) \\ &= A_k(-s_i) - (-1)^k (A_{k-1}(s_i) + \alpha_k s_i A_k''(s_i)) \\ &= A_k(-s_i) - (-1)^k \alpha_k s_i A_k''(s_i) \\ &= A_k(-s_i) + \alpha_k s_i A_k''(-s_i) = A_{k-1}(-s_i) \quad . \end{aligned}$$

Die veränderten Terme sind an den Singularitäten s_i gleich, dadurch bleiben deren Residuen unverändert. Deshalb sind die Integrale entlang C_1 gleich:

$$\oint_{C_1} f_1(s) ds = \oint_{C_1} f_2(s) ds \quad . \quad (3.85)$$

Nehmen wir nun einen veränderten Integrationsweg C_r nach Bild 26. Da auch bei f_2 der Nennergrad um mindestens 2 den Zählergrad überwiegt, hat f_2 an der Stelle ∞ das Residuum 0 und es folgt

$$\oint_{C_1} f_2(s) ds = - \oint_{C_r} f_2(s) ds \quad . \quad (3.86)$$

Untersuchen wir jetzt die Funktion

$$f_3(s) := \frac{B_{k-1}(s) B_{k-1}(-s)}{A_k(s) 2 A_k''(-s)} \quad , \quad (3.87)$$

so werden wir feststellen, daß f_2 und f_3 innerhalb C_r die gleichen Residuen besitzen. Die Singularitäten im Innern von

C_r sind nur die Nullstellen s_i von A_k'' , welche imaginär sind.
Nach (3.81):

$$A_{k-1}(s_i) = A_k(s_i) - \alpha_{k-1} s_i A_k''(s_i) = A_k(s_i) \quad .$$

Durch die Gleichheit bleiben die Residuen innerhalb C_r unverändert, es folgt

$$\oint_{C_r} f_2(s) ds = \oint_{C_r} f_3(s) ds \quad . \quad (3.88)$$

Wir gehen wieder zu der Kontur C_1 über:

$$\oint_{C_r} f_3(s) ds = - \oint_{C_1} f_3(s) ds \quad . \quad (3.89)$$

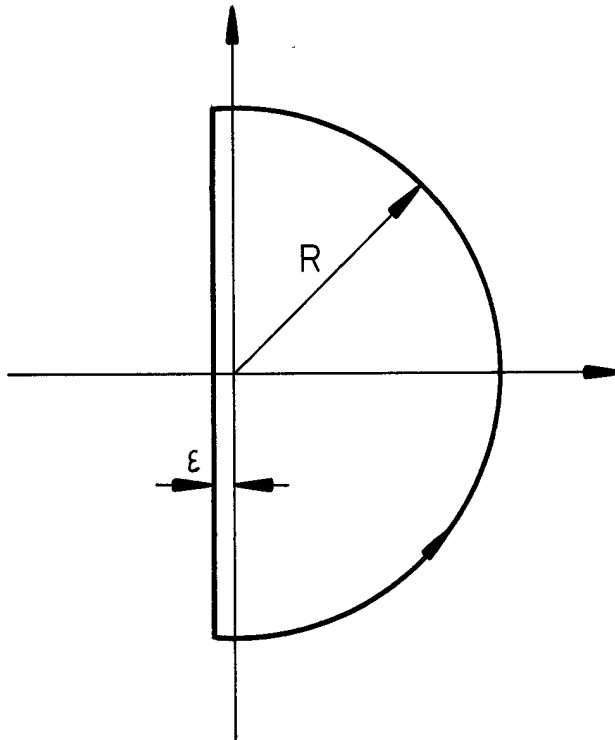


Bild 26: Der Integrationsweg C_r

Schließlich die Funktion

$$f_4(s) := \frac{B_{k-1}(s) B_{k-1}(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} . \quad (3.90)$$

Die Pole s_i von f_3 und f_4 innerhalb C_1 sind wieder gleich (die Nullstellen von A_k). Ebenso die Residuen, da nach (3.78)

$$A_k(-s_i) = (-1)^k A_k(s_i) + 2 A_k''(-s_i) = 2 A_k''(-s_i) .$$

Daraus folgt

$$\oint_{C_1} f_3(s) ds = \oint_{C_1} f_4(s) ds . \quad (3.91)$$

Durch Zusammenfassung ergibt sich dann

$$\oint_{C_1} f_1(s) ds = \oint_{C_1} f_4(s) ds \quad (3.92)$$

bzw.

$$I_{k-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_{k-1}(s) B_{k-1}(-s)}{A_{k-1}(s) A_{k-1}(-s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_{k-1}(s) B_{k-1}(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds . \quad (3.93)$$

Durch Einsetzen von (3.82) gelangen wir zu

$$I_{k-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_k(s) B_k(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds - \frac{\beta_k}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_k(s) A_k''(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds \\ - \frac{\beta_k}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{A_k''(s) B_k(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds + \frac{\beta_k^2}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{A_k''(s) A_k''(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds . \quad (3.94)$$

Das erste Integral in (3.94) ist I_k . Wir formen das zweite um:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_k(s) A_k''(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_k(s) A_k''(-s)}{A_k(s) 2 A_k''(-s)} ds =$$

$$\frac{1}{4\pi j} \oint_{C_1} \frac{B_k(s)}{A_k(s)} ds = \frac{1}{2} \frac{b_k^1}{a_k^0} \quad (3.95)$$

Die erste Umformung in (3.95) folgt der Herleitung von (3.91). Das letzte Integral löst man, indem man berücksichtigt, daß alle Singularitäten des Integranden (Nullstellen von A_k) innerhalb C_1 liegen. Dann kann man nämlich statt C_1 einen Vollkreis als Integrationsweg wählen, dessen Radius man gegen ∞ streben läßt. Dabei sind nur die Koeffizienten höchster Ordnung von Bedeutung.

Das dritte Integral aus (3.94) liefert den gleichen Wert wie (3.95).

Nun zum letzten Integral:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{A_k''(s) A_k''(-s)}{A_k(s) A_k(-s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{A_k''(s) A_k''(-s)}{A_k(s) 2 A_k''(-s)} ds =$$

$$\frac{1}{4\pi j} \oint_{C_1} \frac{A_k''(s)}{A_k(s)} ds = \frac{1}{2} \frac{a_k^1}{a_k^0} \quad (3.96)$$

Zusammen ergibt das

$$I_{k-1} = I_k - \frac{\beta_k}{2} \frac{b_k^1}{a_k^0} - \frac{\beta_k}{2} \frac{b_k^1}{a_k^0} + \frac{\beta_k^2}{2} \frac{a_k^1}{a_k^0} = I_k - \frac{\beta_k^2}{2\alpha_k} \quad (3.97)$$

Die Rekursion endet mit $I_0 = 0$. Als Endergebnis erhalten wir

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2}{2\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(b_k^1)^2}{2a_k^0 a_k^1} \quad (3.98)$$

Im Schema tauchen die Koeffizienten mit ungeradem oberem Index nicht mehr auf, da sie sich nach (3.99) durch Koeffizienten mit geradem oberem Index ausdrücken lassen. Die ersten beiden Zeilen in der linken Hälfte des Schemas sind also die gegebenen Koeffizienten des Polynoms $A = A_n$, in der ersten Zeile der rechten Hälfte stehen die Koeffizienten von $B = B_n$. Die weiteren Zeilen werden nach folgender Vorschrift berechnet:

$$a_{k-1}^i = a_{k+1}^{i+2} - \frac{a_{k+1}^o a_k^{i+2}}{a_k^o} \quad , \quad i \text{ gerade} \quad , \quad (3.101)$$

und

$$b_{k-1}^i = b_k^{i+1} - \frac{b_k^1 a_{k-1}^i}{a_{k-1}^o} \quad , \quad i \text{ gerade} \quad , \quad (3.102)$$

sowie

$$b_{k-1}^i = b_k^{i+1} \quad , \quad i \text{ ungerade} \quad . \quad (3.103)$$

Diejenigen Koeffizienten, die lediglich ohne weitere Rechnung nochmals angeschrieben werden müssen, sind durch Pfeile gekennzeichnet. Alle anderen werden nach (3.101) und (3.102) berechnet. In beiden Fällen ergibt sich ein zu berechnender Koeffizient durch Koeffizienten der beiden darüber liegenden Zeilen. Sowohl für den linken als auch für den rechten Teil des Schemas präge man sich folgende Arbeitsweise ein:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & \cdot & \cdot & x_2 & \cdot & \cdot \\ x_3 & \cdot & \cdot & x_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & y & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Dann ist

$$y = x_2 - \frac{x_1 x_4}{x_3} \quad . \quad (3.104)$$

Nach Fertigstellung des Rechenschemas sind die zur Berechnung des Integrals (3.100) notwendigen Koeffizienten der ersten Spalte der rechten Hälfte des Schemas zu entnehmen.

Der rechte Teil unseres Schemas ist dem Routh-Schema völlig identisch, so daß man gleichzeitig prüfen kann, ob ein Hurwitz-Polynom vorliegt. Dazu müssen sämtliche Koeffizienten der ersten Spalte des linken Teils positiv sein.

Beispiel:

$$G(s) = \frac{2s^2 - s + 5}{6s^4 + 3s^3 + 17s^2 + 8s + 2} \quad (3.105)$$

6 17 2	0 2 -1 5	$a_4^0 = 6$ $b_4^1 = 0$
3 8	3 8 2 -1 5	$a_3^0 = 3$ $b_3^1 = 2$
1 2	1 2 -1 1	$a_2^0 = 1$ $b_2^1 = -1$
2	2 1	$a_1^0 = 2$ $b_1^1 = 1$
2		$a_0^0 = 2$

Nach (3.100) folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{0^2}{2 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{2^2}{2 \cdot 3 \cdot 1} + \frac{(-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 1,042 \quad .$$

In diesem Beispiel sind die durch G direkt gegebenen Koeffizienten durch Fettdruck im Schema hervorgehoben.

3.2.3 Herleitung der L_∞ -Stabilität

Nehmen wir an, unser Regelkreis nach Bild 1 mit den beiden Teilsystemen Γ und N erfülle mit einem $\alpha < 0$ die Voraussetzungen für das Kreiskriterium (Satz 3.2 in Abschnitt 3.2.1). Dann ist die L_2^a -Stabilität gesichert und nach (3.67) existiert die Abschätzung

$$|u|_2^a \leq \frac{1}{1-\alpha} |r|_2^a \quad . \quad (3.106)$$

Ist jetzt r zusätzlich beschränkt, gehört also auch zum Raum L_∞ , so werden wir zeigen, daß dann auch die Ausgangsfunktion y Element des Raumes L_∞ ist. Die Funktion u selbst muß dann keineswegs zwingend zum Raum L_∞ gehören. Diesen Umstand kann man sich durch das „Glättungsverhalten“ von Γ erklären (Γ ist nicht sprunghaft).

Wir lassen nun für r beschränkte Funktionen zu und gehen im weiteren nur von der Menge der Funktionen u nach (3.106) aus. Die Menge der Funktionen u nach (3.106) ist allerdings größer als die der tatsächlich möglichen Funktionen u , so daß hier eine zusätzliche Abschätzung auftritt.

Sei nun

$$|r|_\infty = \rho \quad . \quad (3.107)$$

Definieren wir die Funktion

$$r_T := P_T r \quad (3.108)$$

mit dem Projektionsoperator P_T nach (1.29), so erzeugt wegen der Kausalität des Systems die Funktion r_T stets die gleichen Werte $u(t)$ und $y(t)$ für $t \leq T$ wie r .

Der Funktion r_T ist aber der Vorzug zu geben, da bei ihr

gegenüber r zusätzlich zu der L_∞ -Norm,

$$|r_T|_\infty \leq \rho \quad , \quad (3.109)$$

stets auch die L_2^a -Norm existiert (s. (2.3)):

$$\begin{aligned} (|r_T|_2^a)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |r_T(t) e^{at}|^2 dt \\ &\leq \int_{-\infty}^T (\rho e^{at})^2 dt = \rho^2 \int_{-\infty}^T e^{2at} dt \rightarrow \\ |r_T|_2^a &\leq \frac{\rho e^{aT}}{\sqrt{2a}} = \frac{e^{aT}}{\sqrt{2a}} |r|_\infty \quad . \end{aligned} \quad (3.110)$$

Für

$$u_T := P_T u \quad (3.111)$$

folgt dann mit (3.106)

$$|u_T|_2^a \leq \frac{e^{aT}}{\sqrt{2a} (1 - \alpha)} |r|_\infty \quad . \quad (3.112)$$

Für die Ausgangsfunktion y gilt dann nach (1.4):

$$y(T) = \int_{-\infty}^T g(T-\tau) u(\tau) d\tau \quad , \quad (3.113)$$

wir formen um:

$$y(T) = \int_{-\infty}^T g(T-\tau) e^{-a\tau} u(\tau) e^{a\tau} d\tau \rightarrow \quad (3.114)$$

$$|y(T)| \leq \int_{-\infty}^T |g(T-\tau) e^{-a\tau}| |u(\tau) e^{a\tau}| d\tau \quad (3.115)$$

und wenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an:

$$|y(T)|^2 \leq \int_{-\infty}^T |g(T-\tau) e^{-a\tau}|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^T |u(\tau) e^{a\tau}|^2 d\tau \rightarrow$$

$$|y(T)|^2 \leq \int_{-\infty}^0 |g(-\tau) e^{-a(\tau+T)}|^2 d\tau \cdot (|u_T|_2^a)^2 \rightarrow$$

$$|y(T)|^2 \leq e^{-2aT} \int_0^{\infty} |g(\tau) e^{a\tau}|^2 d\tau \cdot (|u_T|_2^a)^2$$

Nach (3.112):

$$|y(T)| \leq e^{-aT} \left(\int_0^{\infty} |g(\tau) e^{a\tau}|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{aT}}{\sqrt{2a} (1-\alpha)} |r|_{\infty} \rightarrow$$

$$|y(T)| \leq \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{2a} (1-\alpha)} |r|_{\infty} \quad (3.116)$$

mit

$$I := \int_0^{\infty} |g(\tau) e^{a\tau}|^2 d\tau = (|g|_2^a)^2. \quad (3.117)$$

Die rechte Seite der Ungleichung (3.116) ist unabhängig von T . Daher folgt sogar

$$|y|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{2a} (1-\alpha)} |r|_{\infty}. \quad (3.118)$$

Unter Ausnutzung des Kreiskriteriums für die L_2^a -Stabilität ist es nun gelungen auch die L_{∞} -Stabilität der Ausgangsgröße y mit der Abschätzung (3.118) nachzuweisen. Für die Größe u läßt sich im allgemeinen Fall keine solche Abschätzung im Raum L_{∞} angeben. Nur wenn wir N auf Sektorfunktionen (3.65) einschränken (N ist hier Operator auf L_2^a !), können wir sofort

$$|u|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{I} \nu}{\sqrt{2a} (1-\alpha)} |r|_{\infty} \quad (3.119)$$

angeben.

Das Integral I läßt sich nun sehr vorteilhaft in den Bildbereich der Laplacetransformation übertragen. Dazu schränken

wir die Übertragungsfunktion $G = \mathcal{L}g$ auf reelle, echt gebrochene rationale Funktionen ein. Wir wenden die Parsevalsche Gleichung und den Verschiebungssatz der Laplacetransformation an:

$$I = \int_0^{\infty} |g(\tau) e^{a\tau}|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega - a)|^2 d\omega \quad . \quad (3.120)$$

Führen wir

$$G_a(s) := G(s-a) \quad (3.121)$$

ein, so können wir

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_a(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.122)$$

mit Hilfe des im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Verfahrens relativ einfach berechnen.

Im nächsten Abschnitt werden wir an Beispielen sehen, daß die hier entwickelte Abschätzung (3.118) brauchbare Ergebnisse liefert.

Ein Nachteil soll nicht verschwiegen werden: In (3.118) geht der exponentielle Stabilitätsgrad a ein; die Größen α und I hängen von a ab. Ein System ist aber - wenn überhaupt - immer für eine Menge $A = (0, a_{\max})$ L_2^a -stabil ($a \in A$, $a > 0$). Für alle $a \in A$ liefert (3.118) eine Abschätzung. Welches a nun jedoch die kleinste Schranke für y liefert, ist nicht ohne weiteres erkennbar. Als Faustregel kann jedoch etwa die Hälfte des maximal möglichen Stabilitätsgrades wählen: $a_{\text{opt}} \approx \frac{1}{2} a_{\max}$. Das setzt aber wieder die Kenntnis von a_{\max} voraus.

3.2.4 Beispiele

Greifen wir zunächst das Beispiel aus 3.1.2 auf (Kupplungsstangenantrieb). Dort wurde die L_∞ -Stabilität direkt im Raum L_∞ untersucht. Es galt

$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + 2Ds + C} \quad . \quad (3.123)$$

Da die Nichtlinearität eine Sektorfunktion war, gilt in L_∞ und L_2^a die gleiche Schranke ν . Jetzt ist (3.121):

$$G_a(s) = G(s-a) = \frac{1}{Js^2 + 2(D-aJ)s + C - 2aD + a^2J} \quad . \quad (3.124)$$

Abkürzungen:

$$D'' := D - aJ \quad , \quad C'' := C - 2aD + a^2J \quad \rightarrow \quad (3.125)$$

$$G_a(s) = \frac{1}{Js^2 + 2D''s + C''} \quad . \quad (3.126)$$

Das Integral (3.122) lösen wir nach dem Verfahren in Abschnitt 3.2.2 (3.100):

$$\begin{array}{cc|cc} J & C'' & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ 2D'' & & 2D'' & \\ \hline & & 1 & \\ C'' & & & \end{array} \quad \rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{1}{2D''C''} \quad (3.127)$$

Für die Abschätzung (3.118) benötigen wir jetzt noch $\alpha = \gamma\nu$, wobei γ Schranke von Γ im Raum L_2^a ist.

Nach (2.41):

$$\gamma = |\Gamma|_2^a = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega - a)| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G_a(j\omega)| \quad . \quad (3.128)$$

Der Wert von γ läßt sich 2.2.1 entnehmen: Hat G_a reelle Pole, ist $\gamma = 1/C''$, andernfalls ergibt sich

$$\gamma = \frac{1}{2C''D''} \sqrt{\frac{C''J}{1 - D''^2}} \quad . \quad (3.129)$$

Wir benutzen dieselben Zahlenwerte wie in 3.1.2. G hat dann Pole s_i mit $\text{Re}(s_i) = -0,2$. D.h. Γ ist nur Operator auf L_2^a mit $a < 0,2$. Dadurch gewinnen wir eine Vorstellung für die Wahl von a für (3.118). Aus (3.118), (3.125), (3.127) und (3.129) ergibt sich dann:

$$a = 0,02 \quad \rightarrow$$

$$\frac{|u|_\infty}{|r|_\infty} = \frac{|\phi|_\infty}{|M|_\infty} \leq 13,66 \quad , \quad (3.130)$$

$$a = 0,03 \quad \rightarrow$$

$$\frac{|\phi|_\infty}{|M|_\infty} \leq 12,45 \quad , \quad (3.131)$$

$$a = 0,05 \quad \rightarrow$$

$$\frac{|\phi|_\infty}{|M|_\infty} \leq 12,88 \quad . \quad (3.132)$$

Das günstigste Ergebnis liefert $a = 0,03$. Wir vergleichen dieses Ergebnis mit (3.30), welches direkt im Raum L_∞ gewonnen wurde: (3.131) ist etwas ungünstiger als (3.30), liegt aber noch in derselben Größenordnung.

Die hiesige Rechnung ist etwas aufwendiger als die erste Alternative nach 3.1.2. Bei Systemen höherer Ordnung dürfte

aber dieses Verfahren günstiger ausfallen, da dann $|\Gamma|_2^a$ immer noch relativ einfach durch Konstruktion von Frequenzkennlinien bzw. durch Näherungsrechnung gewonnen werden kann, während $|\Gamma|_\infty$ (2.10) für das erste Verfahren wesentlich komplizierter werden wird als bei Systemen 2. Ordnung.

Ein weiteres Beispiel (System 3. Ordnung):

Der lineare, zeitinvariante Operator Γ werde durch

$$G(s) = \frac{(s-2)(s-5)}{(s-1)(s-20)(s-100)} \quad (3.133)$$

gegeben. Für den nichtlinearen, zeitvarianten Operator N existiere in L_2^a die Schranke

$$\nu = 30 \quad . \quad (3.134)$$

Γ ist Operator auf L_2^a für $a < 1$. Wir wählen

$$a = 0,3 \quad . \quad (3.135)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} G_a(s) &= \frac{(s-1,7)(s-4,7)}{(s-0,7)(s-19,7)(s-99,7)} \\ &= \frac{s^2 + 6,4s + 7,99}{s^3 + 120,1s^2 + 2047,67s + 1374,863} \quad . \quad (3.136) \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral (3.121) nach (3.100):

1	2047,67	1	6,4	7,99
120,1	1374,863	120,1		1374,863
		6,4	-3,458	
2036,222		2036,222		
			-3,458	
1374,863				

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{120,1} + \frac{6,4^2}{120,1 \cdot 2036,222} + \frac{3,458^2}{2036,222 \cdot 1374863} \right)$$

$$I = 4,249 \cdot 10^{-3} \quad (3.137)$$

Nun zu $\gamma = |\Gamma|_2^a$. Asymptote von G_a ist für $s \rightarrow \infty$ $1/s$. Durch kurzes Skizzieren des Betragsfrequenzganges $|G_a(j\omega)|$ überzeugt man sich, daß dieser immer unter $1/\omega$ liegt. Der Betragsfrequenzgang wächst also für $s \rightarrow 0$ etwa mit $1/s$, knickt dann aber bei der Frequenz 99,7 in die Waagerechte ab. Daher ist

$$|G_a(j\omega)| \leq \frac{1}{99,7} = 1,003 \cdot 10^{-2} \quad , \quad (3.138)$$

woraus wegen (2.41)

$$\gamma \leq 1,003 \cdot 10^{-2} \quad (3.139)$$

folgt. Damit haben wir alle Werte zusammen und es gilt nach (3.118):

$$|y|_\infty \leq 0,120 |r|_\infty \quad . \quad (3.140)$$

Verzeichnis einiger wichtiger Symbole

Symbol	Erläuterung	Seite
a	: Exponentieller Stabilitätsgrad, Koeffizient des Nennerpolynoms von G	72
b	: Koeffizient des Zählerpolynoms von G	72
\mathbb{C}	: Menge der komplexen Zahlen	
d	: Dämpfung	29
E_a	: Exponentialoperator	24
G	: Übertragungsfunktion	6
g	: Gewichtsfunktion	6
Γ	: Operator eines linearen, zeitinvarianten Systems	5
γ	: Schranke des Operators Γ	20
h	: Sprungantwort	26
j	: imaginäre Einheit	
L_p	: Raum der in der p -ten Potenz integrierbaren Funktionen	23
L_∞	: Raum der beschränkten Funktionen	23
L_p^a	: Raum der mit der Gewichtung e^{at} in der p -ten Potenz integrierbaren Funktionen	23
\mathcal{L}	: Zweiseitige Laplacetransformation	6
N	: Operator eines nichtlinearen, zeitvarianten Systems	5
ν	: Schranke des Operators N	20
ω	: Kreisfrequenz	
ω_0	: Knickfrequenz	29
P_T	: Projektionsoperator	17

\mathbb{R}	: Menge der reellen Zahlen	
\mathbb{R}^+	: Menge der positiven reellen Zahlen	
\mathbb{R}_0^+	: Menge der reellen Zahlen größer gleich Null	
r	: Eingangsfunktion des nichtlinearen Standardregelkreises	5
s	: Unabhängige Variable im Bildbereich der Laplacetransformation	
σ	: Sprungfunktion	26
u	: Eingangsfunktion des linearen, zeitinvarianten Teilsystems	5
y	: Ausgangsfunktion des linearen, zeitinvarianten Teilsystems	5
$*$: Faltungsprodukt	6
$ \cdot $: Betrag einer reellen oder komplexen Zahl, Norm einer Funktion oder eines Operators	14
$ \cdot _p$: Norm im Raum L_p	23
$ \cdot _\infty$: Norm im Raum L_∞	23
$ \cdot _p^a$: Norm im Raum L_p^a	23

Literaturverzeichnis

- [A1] M. Athans - P.L. Falb:
Optimal Control.
McGraw-Hill Book Company, New York - London, 1966.
- [A2] K.J. Åström:
Introduction to Stochastic Control Theory.
Academic Press, New York - London, 1970.
- [A3] K.J. Åström:
Why use adaptive techniques for steering large tankers?
International Journal on Control, 1980, Vol.32, No.4,
pp. 689 - 708.
- [B1] I.N. Bronstein - K.A. Semendjajew:
Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/Main,
19. Aufl., 1980.
- [B2] I.N. Bronstein - K.A. Semendjajew:
Ergänzende Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/Main,
19. Aufl., 1980.
- [B3] R.W. Brockett:
Finite Dimensional Linear Systems.
John Wiley and Sons, New York - London, 1970.
- [D1] D. Dreyer:
Die Analyse nichtlinearer zeitveränderlicher Regelungssysteme mit Hilfe verallgemeinerter Wurzelortskurven.
Dissertation, TU Berlin, 1972.

- [D2] D. Dreyer:
Die absolute Stabilität linearer Differentialgleichungen
in B- und B*-Algebren.
Dissertation, TU Berlin, 1978.
- [F1] O. Föllinger:
Laplace- und Fourier-Transformation.
Elitera-Verlag, Berlin 1977.
- [H1] J.C. Hsu - A.U. Meyer:
Modern Control Principles and Applications.
McGraw-Hill Book Company, New York - London, 1968.
- [H2] B. Huber:
Über die Analyse einer Klasse nichtlinearer Systeme.
Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik, Leipzig 8, 1978 2,
S. 97 - 110.
- [K1] H. Karl:
Entwurf linearer Regelkreise unter den Einfluß sto-
chastischer Größen.
Diplomarbeit, TU Berlin, 1976.
- [L1] L.A. Ljusternik - W.I. Sobolew:
Elemente der Funktionalanalysis.
Verlag Harri Deutsch, Zürich - Frankfurt/Main - Thun,
5. Aufl., 1976.
- [M1] K. Magnus:
Schwingungen.
Teubner Verlag, Stuttgart, 2. Aufl., 1969.
- [W1] J.C. Willems:
Stability, Instability, Invertibility and Causality.
SIAM Journal on Control, Vol. 7, No. 4, 1969, pp. 645 - 671.

- [Z1] G. Zames:
Nonlinear time varying feedback systems - Conditions
for L_∞ -boundedness derived using conic operators on
exponentially weighted spaces.
Proceedings Allerton Conference, 1965, pp. 460 - 471.
- [Z2] R. Zurmühl:
Praktische Mathematik.
Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York,
5. neubearbeitete Aufl., 1965.