

EIN KREISKRITERIUM FÜR MEHRGRÖSSEN-
SYSTEME UND SEINE ANWENDUNG AUF
MECHANISCHE SCHWINGUNGSSYSTEME

STUDIENARBEIT 1981

JOACHIM BÖCKER

INSTITUT FÜR REGELUNGSTECHNIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

D-1000 BERLIN
F. R. Germany

EINLEITUNG

Kern dieser Arbeit ist die Darstellung eines Stabilitätskriteriums für nichtlineare Mehrgrößensysteme (Kreiskriterium, Abschnitt 3.2).

Es wurde jedoch versucht, eine für die Regelungstechnik nicht typische Anwendung für dieses Kriterium aufzuzeigen; ein Beispiel (Abschnitt 2.3.2) weist auf die Möglichkeit der Anwendung auf mechanische Systeme hin.

Das erste Kapitel versteht sich somit als kurze Zusammenfassung der Grundlagen über Eigenwertprobleme, die in dieser Form in der Mechanik wohl mehr Verwendung finden als in der Regelungstechnik.

Im zweiten Kapitel werden die Näherungsverfahren nach Ritz und Galerkin beschrieben, durch deren Anwendung auf ein mechanisches Problem wir zu der gleichen Struktur wie der eines nichtlinearen Mehrgrößensystems der Regelungstechnik kommen.

Im dritten Kapitel endlich wird ein Kreiskriterium für Mehrgrößensysteme vorgestellt, der Abschnitt 3.1 bereitet dafür die Grundlagen auf. Es folgt ein Beispiel zur Anwendung (Abschnitt 3.3).

Die Arbeit schließt mit dem Versuch, die nicht nur bei dem Mehrgrößenkreiskriterium auftretenden „Gerschgorinbänder“ in die besser zu handhabende Frequenzkennliniendarstellung zu übertragen.

INHALTSVERZEICHNIS

1.	Eine kurze Einführung über Eigenwertprobleme	1
1.1	Selbstadjungierte Eigenwertprobleme	1
1.2	Realität der Eigenwerte	4
1.3	Definite Eigenwertaufgaben	5
1.4	Orthogonalsystem der Eigenfunktionen	7
1.5	Minimaleigenschaft des Rayleigh-Quotienten	11
1.6	Reihenentwicklung willkürlicher Funktionen	12
2.	Näherungsverfahren	16
2.1	Das Ritzsche Verfahren	16
2.1.1	Näherung für die Eigenwertaufgabe	19
2.1.2	Variationsaufgaben und die Eulersche Differentialgleichung	23
2.1.3	Die Umkehrung der Fragestellung der Variationsrechnung	28
2.1.4	Näherung von Randwertaufgaben mit dem Ritzschen Verfahren	34
2.2	Das Galerkinsche Verfahren	35
2.3	Beispiele	37
2.3.1	Die Durchbiegung des belasteten Stabes	37
2.3.2	Das durchströmte Rohr	48
3.	Die Stabilität von Mehrgrößensystemen	58
3.1	Vorbemerkungen	58
3.1.1	Das Gerschgorin-Theorem	58
3.1.2	Diagonaldominante Matrizen	61
3.1.3	Das Nyquist-Kriterium	62
3.1.4	Das inverse Nyquist-Kriterium (Rosenbrock)	71

3.1.5	Der Banachsche Fixpunktsatz	74
3.1.6	Abschätzungen von Matrizennormen	80
3.1.7	Norm eines Faltungsooperators	86
3.2	Ein Kreiskriterium für Mehrgrößensysteme	88
3.3	Gekoppelte Mathieusche Differentialgleichungen	107
3.4	Eine Abschätzung von Gerschgorinbändern	116
	Literaturverzeichnis	123

1. EINE KURZE EINFÜHRUNG ÜBER EIGENWERTPROBLEME

Es liegt die lineare, homogene Eigenwertaufgabe

$$L[y] = \lambda M[y] \quad (1.1)$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$U_i[y] = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (1.2)$$

welche sich auf die Ränder $x = a$ und $x = b$ beziehen mögen, vor. L , M und U_i sind lineare Differentialoperatoren, bei denen wir nur reelle Koeffizienten annehmen wollen.

Die triviale Funktion $\varphi \equiv 0$ befriedigt (1.1), (1.2) immer. Gibt es aber nun Werte des Parameters λ , bei denen eine nicht triviale Funktion die Aufgabe (1.1), (1.2) erfüllt,

$$L[\varphi_k] = \lambda_k M[\varphi_k], \quad U_i[\varphi_k] = 0,$$

so wird der Parameter λ_k als Eigenwert und die Funktion φ_k als zugehörige Eigenfunktion bezeichnet.

Eine Funktion u über dem Intervall $[a, b]$ heiße nun Vergleichsfunktion, wenn sie nur die Randbedingungen (1.2) erfüllt und dabei so oft stetig differenzierbar ist, wie es die Operatoren L und M erfordern. Dabei soll $u \neq 0$ gelten.

1.1 Selbstadjungierte Eigenwertprobleme

Die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2) wird als selbstadjungiert bezeichnet, wenn mit zwei beliebigen Vergleichsfunktionen u und v die folgenden Bedingungen gelten:

$$\int_a^b u L[v] dx = \int_a^b v L[u] dx \quad (1.3a)$$

$$\int_a^b u M[v] dx = \int_a^b v M[u] dx \quad (1.3b)$$

Eine kurze Erläuterung zu diesem Begriff: V sei der Raum aller Vergleichsfunktionen zuzüglich des Nullelementes. L und M sind dann lineare Operatoren

$$L : V \rightarrow C([a,b]) \quad ,$$

$$M : V \rightarrow C([a,b]) \quad .$$

Wir erinnern uns, daß die zu einer Abbildung L adjungierte Abbildung L^* über das innere Produkt

$$(u, L[v]) = (L^*[u], v) \quad (1.4)$$

definiert wird, welches in einem Funktionenraum durch das Integral

$$(u, L[v]) = \int_a^b u L[\bar{v}] \, dx \quad (1.5)$$

gegeben werden kann. \bar{v} ist der konjugiert komplexe Wert.

Ist nun die adjungierte Abbildung L^* identisch der Abbildung L und gilt überdies dasselbe für M , so ist die Eigenwertaufgabe selbstadjungiert. Als äquivalente Bedingungen zu (1.3a) und (1.3b) können wir schreiben:

$$(u, L[v]) = (L[u], v) \leftrightarrow (u, L[v]) = \overline{(v, L[u])}, \quad (1.6a)$$

$$(u, M[v]) = (M[u], v) \leftrightarrow (u, M[v]) = \overline{(v, M[u])}, \quad (1.6b)$$

Nimmt nun die Eigenwertaufgabe die einfachere, häufig auftauchende Form

$$L[y] = \lambda \rho(x) y \quad (1.7)$$

mit der Gewichtsfunktion ρ an, so erfüllt die rechte Seite mit $M[y] = \rho(x) y$ sofort die Bedingung (1.6b),

$$(u, \rho v) = \int_a^b u(x) \rho(x) \bar{v}(x) \, dx = (\rho v, u) \quad .$$

In diesem Fall ist zur Prüfung der Selbstadjungiertheit nur noch die Bedingung (1.6a) an L zu untersuchen.

Für eine Reihe von Eigenwertaufgaben der Form (1.7) kann auch dies in allgemeiner Weise gezeigt werden, so z.B. für die spezielle Sturm-Liouvillesche Aufgabe:

$$\begin{aligned} L[y] &= -(a_1(x) y')' + a_0(x) y = \lambda \rho(x) y, \\ U_1[y] &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ U_2[y] &= \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned} (u, L[v]) - (L[u], v) &= \int_a^b (u L[\bar{v}] - L[u] \bar{v}) dx \\ &= \int_a^b [u (-(a_1 \bar{v}')' + a_0 \bar{v}) - \bar{v} (-(a_1 u')' + a_0 u)] dx \\ &= \int_a^b [-u (a_1 \bar{v}')' + \bar{v} (a_1 u')'] dx, \end{aligned}$$

durch partielle Integration:

$$= [-u(a_1 \bar{v}') + \bar{v}(a_1 u')]_a^b + \int_a^b (u' a_1 \bar{v}' - \bar{v}' a_1 u') dx$$

und unter Ausnutzung der Randbedingungen:

$$= [a_1 (u \frac{\beta_1}{\beta_2} \bar{v} - \bar{v} \frac{\beta_1}{\beta_2} u)]_b - [a_1 (u \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{v} - \bar{v} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} u)]_a = 0.$$

Die beiden inneren Produkte sind also gleich; damit ist die Selbstadjungiertheit der speziellen Sturm-Liouvilleschen Aufgabe gezeigt. Auch in anderen Fällen prüft man die Selbstadjungiertheit durch partielle Integration.

1.2 Realität der Eigenwerte

Die Eigenwerte des Problems (1.1), (1.2), welches wir als selbstadjungiert voraussetzen wollen, können sowohl komplex als auch reell sein. Wir können aber Bedingungen für die Realität der Eigenwerte angeben.

Ist λ ein Eigenwert mit der Eigenfunktion φ , so muß auch der konjugiert komplexe Wert $\bar{\lambda}$ Eigenwert mit der Eigenfunktion $\bar{\varphi}$ sein:

$$L[\varphi] = \lambda M[\varphi] \quad \leftrightarrow \quad (1.9)$$

$$\overline{L[\varphi]} = \overline{\lambda M[\varphi]} \quad \leftrightarrow$$

$$L[\bar{\varphi}] = \bar{\lambda} M[\bar{\varphi}] \quad (1.10)$$

Von (1.9) und (1.10) kommen wir zu den inneren Produkten

$$(\varphi, L[\varphi]) = \lambda (\varphi, M[\varphi])$$

und $(\bar{\varphi}, L[\bar{\varphi}]) = \bar{\lambda} (\bar{\varphi}, M[\bar{\varphi}])$.

Aufgrund der Selbstadjungiertheit sind die inneren Produkte jeweils der rechten und linken Seiten gleich, so daß wir durch Subtraktion

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) (\varphi, M[\varphi]) \quad \leftrightarrow$$

$$0 = 2 \operatorname{Im}(\lambda) (\varphi, M[\varphi])$$

erhalten. Sofern der Term $(\varphi, M[\varphi])$ ungleich Null ist, muß der Imaginärteil des Eigenwertes Null sein; die Eigenwerte sind dann reell.

Nun ist mit $\varphi = u + iv$ (u und v reell)

$$(\varphi, M[\varphi]) = (u+iv, M[u+iv])$$

$$= (u, M[u]) + (v, M[v]) + i \left((u, M[v]) - (v, M[u]) \right) .$$

Zu beachten ist, daß der Real- und Imaginärteil von φ auch jeweils allein die Randbedingungen erfüllen und daher u und v zu den Vergleichsfunktionen gehören. Deshalb können wir (1.6b) anwenden und der Imaginärteil verschwindet:

$$(\varphi, M[\varphi]) = (u, M[u]) + (v, M[v]) \quad (1.11)$$

Daher kommen wir zu dem

Satz 1.1: Die selbstadjungierte Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2) hat dann reelle Eigenwerte, wenn der Term

$$(w, M[w]) = \int_a^b w M[w] dx$$

für alle reellen Vergleichsfunktionen w ein festes Vorzeichen besitzt.

Für die spezielle Eigenwertaufgabe (1.7) ist die Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Gewichtsfunktion ρ ein festes Vorzeichen über dem Intervall $[a, b]$ besitzt.

1.3 Definite Eigenwertaufgaben

Definit heißt eine Eigenwertaufgabe dann, wenn sie nur reelle Eigenwerte besitzt und diese entweder alle positiv oder alle negativ sind. Wir sprechen dann von positiv oder negativ definiten Eigenwertaufgaben. Positiv oder negativ semidefinit nennen wir sie, wenn wir die obige Bedingung so erweitern, daß wir auch Eigenwerte gleich Null zulassen.

Als volldefinit bezeichnen wir die Aufgabe (1.1), (1.2) dann, wenn die Bedingungen

$$(u, L[u]) > 0 \quad (1.12a)$$

und $(u, M[u]) > 0 \quad (1.12b)$

für alle Vergleichsfunktionen u erfüllt sind.

Bemerkung: Liegen jetzt die Voraussetzungen für die Selbstadjungiertheit (1.6a), (1.6b) und für die Volldefinitheit (1.12a), (1.12b) vor, so erfüllen die Funktionale

$$(u, v)_L := (u, L[v]) \quad (1.13a)$$

und $(u, v)_M := (u, M[v]) \quad (1.13b)$

die Voraussetzungen für ein neues inneres Produkt im Raum der Vergleichsfunktionen:

$$(u, u)_T \text{ reell und } (u, u)_T > 0 \iff u \neq 0, \quad (1.14a)$$

$$(u, v)_T = \overline{(v, u)}_T, \quad (1.14b)$$

und $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v)_T = \alpha_1 (u_1, v)_T + \alpha_2 (u_2, v)_T. \quad (1.14c)$

(s. [2] S. 12). Außerdem erhalten wir durch

$$\|u\|_T := \sqrt{(u, u)_T} \quad (1.14d)$$

eine Norm. Der Operator T steht hier jeweils stellvertretend für L und M . Die Vergleichsfunktionen bilden somit einen normierten Raum.

Wir gehen jetzt von einer Lösung von (1.1), (1.2),

$$L[\varphi_k] = \lambda_k M[\varphi_k], \quad U_i[\varphi_k] = 0,$$

aus und erhalten durch Bildung des inneren Produktes

$$(\varphi_k, L[\varphi_k]) = \lambda_k (\varphi_k, M[\varphi_k])$$

für den Eigenwert

$$\lambda_k = \frac{(\varphi_k, L[\varphi_k])}{(\varphi_k, M[\varphi_k])}.$$

Setzen wir jetzt statt einer Eigenfunktion eine beliebige Vergleichsfunktion u in diesen Quotienten ein, erhalten wir den Rayleigh-Quotienten

$$R[u] = \frac{(u, L[u])}{(u, M[u])} = \frac{\int_a^b u(x) L[\overline{u(x)}] dx}{\int_a^b u(x) M[\overline{u(x)}] dx} \quad (1.15)$$

Ist die Vergleichsfunktion u eine Eigenfunktion, so nimmt der Rayleigh-Quotient den Wert des zugehörigen Eigenwertes an:

$$R[\varphi_k] = \lambda_k \quad (1.16)$$

In dieser Darstellung erkennen wir leicht den

Satz 1.2: Liegt für das Eigenwertproblem (1.1), (1.2) Volldefinitheit vor, so sind alle Eigenwerte reell und sogar positiv.

Weiterhin ist der Rayleigh-Quotient für alle Vergleichsfunktionen definiert, da der Nenner nicht Null werden kann.

1.4 Orthogonalsystem der Eigenfunktionen

Unter der Orthogonalität zweier Elemente u, v eines Raumes versteht man das Verschwinden ihres inneren Produktes

$$(u, v) = 0 \quad .$$

Man erweitert den Begriff und spricht von „im verallgemeinerten Sinne orthogonal“, wenn gilt

$$(u, M[v]) = 0 \quad .$$

Satz 1.3: Die Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2) sind im verallgemeinerten Sinne orthogonal:

$$(\varphi_k, M[\varphi_l]) = 0 \quad (1.17)$$

Beweis: Wir schreiben zwei Lösungen der Aufgabe (1.1), (1.2) an,

$$L[\varphi_k] = \lambda_k M[\varphi_k]$$

und $L[\varphi_1] = \lambda_1 M[\varphi_1]$,

bilden weitergehend die inneren Produkte

$$(\varphi_1, L[\varphi_k]) = \lambda_k (\varphi_1, M[\varphi_k]) ,$$

$$(L[\varphi_1], \varphi_k) = \lambda_1 (M[\varphi_1], \varphi_k)$$

und subtrahieren diese unter Beachtung der Selbstadjungiertheit:

$$0 = (\lambda_k - \lambda_1) (\varphi_1, M[\varphi_k]) .$$

Setzen wir die Eigenwerte als verschieden voraus, folgt die verallgemeinerte Orthogonalität

$$(\varphi_1, M[\varphi_k]) = 0 \quad \text{für } \lambda_k \neq \lambda_1$$

Sind aber Eigenwerte paarweise gleich $\lambda_k = \lambda_1$, gibt es also mehrfache Eigenwerte, so spannen die zugehörigen Eigenfunktionen zu diesem mehrfachen Eigenwert einen linearen Teilraum auf, dessen Elemente alle Eigenfunktionen zu diesem Eigenwert sind. In diesem Teilraum können wir aber eine Basis von Eigenfunktionen so wählen, daß diese orthogonal ist. Zu Eigenfunktionen anderer Eigenwerte sind diese sowieso orthogonal.

In jedem Fall gibt es also ein System orthogonaler Eigenfunktionen, die wir noch normieren können:

$$\tilde{\varphi}_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{(\varphi_k, M[\varphi_k])}} .$$

Wir erhalten jetzt ein Orthonormalsystem der $\tilde{\varphi}_k$, für das wir sehr bequem

$$(\tilde{\varphi}_k, M[\tilde{\varphi}_l]) = \delta_{kl} \quad (1.18)$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

schreiben können. Außerdem gilt wegen $L[\tilde{\varphi}_l] = \lambda_l M[\tilde{\varphi}_l]$

$$(\tilde{\varphi}_k, L[\tilde{\varphi}_l]) = \lambda_l \delta_{kl} \quad (1.19)$$

Für das einfache Beispiel

$$-y'' = \lambda y ,$$

$$y(0) = 0 ,$$

$$y(1) = 0$$

prüfen wir die Selbstadjungiertheit:

$$(u, L[v]) - (L[u], v) = \int_0^1 (u''\bar{v} - u\bar{v}'') dx =$$

$$[u'\bar{v} - u\bar{v}']_0^1 - \int_0^1 (u'\bar{v}' - u'\bar{v}') dx = 0$$

$$(u, M[v]) - (M[u], v) = \int_0^1 (u\bar{v} - u\bar{v}) dx = 0$$

Die Eigenwertaufgabe ist selbstadjungiert; die normierten Lösungen bilden demnach ein Orthonormalsystem:

$$\lambda_1 = \pi^2 \quad , \quad \varphi_1(x) = \sin \pi x \quad , \quad \tilde{\varphi}_1(x) = \sqrt{2} \sin \pi x \quad ,$$

$$\lambda_2 = 4\pi^2 \quad , \quad \varphi_2(x) = \sin 2\pi x \quad , \quad \tilde{\varphi}_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x \quad ,$$

$$\lambda_3 = 9\pi^2 \quad , \quad \varphi_3(x) = \sin 3\pi x \quad , \quad \tilde{\varphi}_3(x) = \sqrt{2} \sin 3\pi x \quad ,$$

⋮

Das Beispiel ist im Übrigen auch volldefinit, wie man wegen der Positivität der Eigenwerte zwar vermuten, jedoch nicht schließen kann:

$$\begin{aligned} (u, L[u]) &= - \int_0^1 u \bar{u}'' dx = - [u \bar{u}']_0^1 + \int_0^1 u' \bar{u}' dx = \\ &= \int_0^1 |u'|^2 dx > 0 \\ (u, M[u]) &= \int_0^1 |u|^2 dx > 0 \end{aligned}$$

Wählen wir nun das Beispiel anders, so daß wir gar keine Randbedingungen stellen:

$$- y'' = \lambda y .$$

Als Eigenwerte und -funktionen ergibt sich die etwas geänderte Konfiguration mit doppelten Eigenwerten

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 \quad , \quad \varphi_1(x) = 1 \quad , \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \pi^2 \quad , \quad \varphi_2(x) = \cos \pi x \quad , \quad \varphi_3(x) = \sin \pi x \quad , \\ \lambda_4 = \lambda_5 = 4\pi^2 \quad , \quad \varphi_4(x) = \cos 2\pi x \quad , \quad \varphi_5(x) = \sin 2\pi x \quad , \\ \vdots \end{aligned}$$

Diese Eigenfunktionen sind nun aber nicht orthogonal, denn z.B. ist

$$(\varphi_1, M[\varphi_3]) = \int_0^1 1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi} \neq 0 .$$

Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, denn es läßt sich unter dem Wegfall der Randbedingungen nicht mehr die Selbstadjungiertheit zeigen, welche Voraussetzung für die Orthogonalität war.

Für das obige Beispiel gibt es unendlich viele Eigenwerte. Allgemein ist dies jedoch nicht der Fall, es kann auch keineswegs davon ausgegangen werden, daß überhaupt ein Eigenwert existiert.

Wir können aber die folgende Aussage machen:

Satz 1.4: Für das selbstadjungierte volldefinite Eigenwertproblem (1.1), (1.2) gibt es abzählbar unendlich viele reelle, positive Eigenwerte, die sich im Endlichen nicht häufen. Wir können sie aufsteigend ordnen:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad (1.20)$$

Auf den Beweis sei hier verzichtet, siehe dazu [4], S. 127 / 128.

1.5 Minimaleigenschaft des Rayleigh-Quotienten

Der Rayleigh-Quotient (1.15) hat gewisse Minimaleigenschaften bezüglich der Eigenwerte, und zwar gilt der

Satz 1.5: Vorgelegt sei das selbstadjungierte volldefinite Eigenwertproblem (1.1), (1.2). Sei u eine Vergleichsfunktion, die zu den ersten k Eigenfunktionen, welche durch (1.20) geordnet sind, orthogonal ist,

$$(u, M[\varphi_i]) = (u, \varphi_i)_M = 0, \quad i = 1 \dots k, \quad (1.21)$$

so ist der Eigenwert λ_{k+1} eine untere Schranke für den Rayleigh-Quotienten $R[u]$

$$\lambda_{k+1} \leq R[u] \quad (1.22)$$

Sinngemäß entfällt für $k=0$ die Bedingung (1.21). Zum Beweis siehe [4] § 8.

1.6 Reihenentwicklung willkürlicher Funktionen

Das Problem (1.1), (1.2) setzen wir wieder als selbstadjungiert und volldefinit voraus. Dann gibt es nach obigem Satz unendlich viele Eigenfunktionen, von denen wir annehmen dürfen, daß sie ein orthonormales System bilden. Die Funktionen, die wir jetzt in eine Reihe von Eigenfunktionen entwickeln wollen, beschränken wir jedoch auf die Vergleichsfunktionen. Diese bilden nämlich unter den obigen Voraussetzungen einen normierten Raum durch das Skalarprodukt (1.13b). Mit dessen Norm können wir die „Abweichung“ unserer Reihe zu der vorgegebenen Funktion quantifizieren .

Wir geben eine beliebige Funktion $u \in V$ vor und wollen sie durch eine Reihe von Eigenfunktionen

$$v_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (1.23)$$

im Sinne der Norm (1.14d) möglichst gut annähern. Dazu betrachten wir die Fehlerfunktion

$$e_n(x) = v_n(x) - u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) - u(x). \quad (1.24)$$

Die Norm der Fehlerfunktion soll minimal werden:

$$\begin{aligned} \|e_n\|_M^2 &= (v_n - u, v_n - u)_M = \\ &= (v_n, v_n)_M - 2 \operatorname{Re}((u, v_n)_M) + (u, u)_M \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $u_i = (u, \varphi_i)_M$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \|e_n\|_M^2 &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 - 2 \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) + \|u\|_M^2 \\ \|e_n\|_M^2 &= \sum_{i=1}^n |a_i - u_i|^2 - \sum_{i=1}^n |u_i|^2 + \|u\|_M^2 \quad (1.25) \end{aligned}$$

Der Fehler ist dann am kleinsten, wenn die Koeffizienten $a_i = u_i$ gewählt werden.

Satz 1.6: Eine unendliche Reihe von Eigenfunktionen (1.23) nähert eine willkürliche Funktion $u \in V$ genau dann am besten im Sinne eines verallgemeinerten Fehlerquadrates an, wenn für die Reihe die Koeffizienten

$$a_i = (u, \varphi_i)_M \quad (1.26)$$

gewählt werden. Diese werden Fourier-Koeffizienten genannt.

Für das Fehlerquadrat ergibt sich damit

$$\|e_n\|_M^2 = \|u\|_M^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \quad (1.27)$$

Die Reihe (1.23) bietet zwar mit den Fourier-Koeffizienten (1.26) die beste Näherung einer Funktion u im Sinne der Norm $\|e_n\|_M$, leider ist jedoch über die Konvergenz beim Übergang zur unendlichen Reihe $n \rightarrow \infty$ noch nichts ausgesagt.

Zuerst erkennen wir, daß die Funktion e_n orthogonal zu φ_k ($k=1\dots n$), und damit auch zu v_n , ist:

$$\begin{aligned} (e_n, \varphi_k)_M &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i - u, \varphi_k \right)_M = a_k - u_k = 0 \\ \rightarrow (e_n, v_n)_M &= 0. \end{aligned} \quad (1.28a)$$

Im Übrigen gilt wegen $L[\varphi_k] = \lambda_k M[\varphi_k] \rightarrow$

$$(e_n, \varphi_k)_L = \lambda_k (e_n, \varphi_k)_M$$

$$\text{auch } (e_n, \varphi_k)_L = 0, \quad k = 1 \dots n$$

$$\text{und } (e_n, v_n)_L = 0. \quad (1.28b)$$

Mit $u = v_n - e_n$

und $\|u\|_L^2 = (v_n - e_n, v_n - e_n)_L = \|v_n\|_L^2 + \|e_n\|_L^2 - 2\operatorname{Re}(e_n, v_n)_L$

erhalten wir dann wegen (1.28b)

$$\|u\|_L^2 = \|v_n\|_L^2 + \|e_n\|_L^2 \quad (1.29)$$

$$\|e_n\|_L^2 = \|u\|_L^2 - \|v_n\|_L^2 .$$

D.h. $\|e_n\|_L^2$ ist beschränkt, da $\|u\|_L^2$ eine feste Zahl ist.

Schreiben wir jetzt den Raleigh-Quotienten (1.15)

$$R[e_n] = \frac{(e_n, e_n)_L}{(e_n, e_n)_M} = \frac{\|e_n\|_L^2}{\|e_n\|_M^2}$$

an und nutzen die Minimaleigenschaft nach dem Satz 1.5 (S. 11) aus, ergibt sich

$$\frac{\|e_n\|_L^2}{\|e_n\|_M^2} \geq \lambda_{n+1} \quad \leftrightarrow \quad \|e_n\|_M^2 \leq \frac{\|e_n\|_L^2}{\lambda_{n+1}} .$$

Da sich die Eigenwerte nach dem Satz 1.4 nicht im Endlichen häufen, wächst λ_{n+1} für $n \rightarrow \infty$ über alle Grenzen. Weiterhin ist $\|e_n\|_L^2$ beschränkt und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_M = 0 .$$

Damit ist die Konvergenz der Reihe (1.23) gesichert und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u . \quad (1.30)$$

In [4] S.145ff wird für etwas speziellere Formen der Eigenwertaufgabe auch die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihe v_n und deren ersten Ableitungen in x gezeigt.

Aus (1.27) können wir noch die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|_M^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \quad (1.31)$$

entnehmen. Gibt die Größe $\|u\|_M$ gerade die Energie der Funktion u an, so kann man diese auch über die Quadrate der Fourier-Koeffizienten erhalten.

Wir formen (1.29) um in

$$\|u\|_L = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k \right)_L + \|e_{\infty}\|_L$$

und erhalten wegen (1.19)

$$\begin{aligned} \|u\|_L^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \lambda_i + \|e_{\infty}\|_L^2 \rightarrow \\ \|u\|_L^2 &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |a_i|^2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Dies ist die Besselsche Ungleichung.

Leider haben wir uns bei dieser Betrachtung der Reihenentwicklung auf Vergleichsfunktionen einschränken müssen. Möglich wäre noch eine Erweiterung der Menge der entwickelbaren Funktionen, so um die, für die die inneren Produkte $(u, v)_L$ und $(u, v)_M$ noch gelten. Mit diesen läßt sich noch der Satz (1.6) zeigen auch gilt (1.32) und statt (1.31) erhalten wir die Parsevalsche Ungleichung. Die Schritte für den Beweis der Konvergenz lassen sich aber nicht mehr verallgemeinern. Für beliebige Funktionen $u \in C([a, b])$ fehlt uns dann sogar noch die Norm $\|e_n\|_M$, mit der wir den Fehler der Reihenentwicklung beurteilt haben. Man kann natürlich eine andere Norm heranziehen. Es muß also dann von Fall zu Fall über die Möglichkeit einer Reihenentwicklung entschieden werden; eventuell an Hand der praktischen Anschauung.

Weiterführend sei zu den Thema der Eigenwertaufgaben z.B. auf die Darstellungen von L. Collatz und A. Kneschke, [4] und [11], Bd. I und III, verwiesen. Eine kurze Zusammenstellung bietet [3].

2. NÄHERUNGSVERFAHREN

Der näherungsweise Berechnung von Rand- oder Eigenwertaufgaben kommt insbesondere bei der praktischen Anwendung große Bedeutung zu, da die geschlossene Lösung des Problems oft nicht angebar ist oder dies doch zumindest recht schwerfallen kann. Dem entgegen sind manche numerischen Näherungsverfahren keineswegs sehr aufwendig. Wir wollen in diesem Kapitel speziell auf das Ritzsche und das Galerkinsche Verfahren eingehen.

2.1 DAS RITZSCHE VERFAHREN

Wir stellen das Ritzsche Verfahren nicht direkt vom Ansatzpunkt der Rand- oder Eigenwertaufgaben dar, sondern gehen den Weg über die Variationsaufgaben. Der Zusammenhang mit der Aufgabenstellung von Differentialgleichungen wird später erläutert.

Es liegt das reellwertige Funktional

$$J[y] \tag{2.1}$$

vor. Die zugelassenen (evtl. komplexwertigen) Funktionen y sind durch den Definitionsbereich des Funktionals eingeschränkt:

$$y \in D(J) \tag{2.2}$$

Die Aufgabenstellung ist es nun, diejenige Funktion $\varphi \in D(J)$ aufzufinden, die dem Funktional (2.1) ein relatives oder absolutes Minimum erteilt:

$$J[\varphi] = \text{Min} .$$

Im Rahmen dieses Kapitels stellen wir nicht die Frage nach der strengen Lösung, sondern die nach einer guten Näherung.

Wir suchen also eine Funktion u , die dem Funktional einen Wert nahe dem Minimum erteilt:

$$J[u] \approx \text{Min} \quad .$$

Dazu macht Ritz nun den überaus einfachen n -gliedrigen Ansatz

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i(x) \quad . \quad (2.3)$$

Dabei sind die a_i noch frei wählbare Koeffizienten. Für die Funktionen v_i wird lediglich gefordert, daß

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i \in D(J)$$

ist, also die „Nebenbedingung“ (2.2) erfüllt wird. Nach Festlegung der Funktionen v_i hängt der Wert des Funktionals J nur noch von den Koeffizienten a_i ab:

$$J[u] = J \left[\sum_{i=1}^n a_i v_i \right] =: f(a_1, \dots, a_n) \quad .$$

Für ein relatives Minimum der Funktion f müssen als notwendige Bedingung die partiellen Ableitungen verschwinden, wofür wir jedoch die stetige Differenzierbarkeit von f bzw. J voraussetzen:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial a_i} J[u] = 0 \quad , \quad i = 1 \dots n \quad . \quad (2.4)$$

Genau dies sind die Ritzschen Gleichungen, aus denen wir die Koeffizienten a_i unseres Ansatzes (2.3) bestimmen.

Es sei hier nicht darauf eingegangen, ob bei der Erfüllung der Gleichungen (2.4) tatsächlich ein Minimum vorliegt; es könnte sich auch um ein Maximum oder um einen Sattelpunkt

handeln. Speziell für den Fall, daß sich nur eine Lösung der Gleichungen (2.4) ergibt, läßt sich oftmals anhand anschaulicher Argumentation das Vorliegen eines Minimums begründen, besonders dann, wenn das Funktional J eine physikalische Größe darstellt.

Nun ist nichts darüber ausgesagt, wie nahe der Wert $J[u]$ mit den durch (2.4) bestimmten Koeffizienten dem tatsächlichen Minimum $J[\varphi]$ kommt. Es hängt hier vom Geschick des Anwenders ab, die „Koordinatenfunktionen“ v_i möglichst so anzusetzen, daß sie etwa der Gestalt der zu erwartenden Lösung entsprechen. Dies ist insbesondere bei mechanischen Problemen aufgrund der Anschauung meist gut möglich. Auf diese Weise kommt man bisweilen mit zweigliedrigen Ansätzen (2.3) zu ausgezeichneten Näherungen der Lösungsfunktionen. Doch auch, wenn wir noch keine Vorstellung von der Lösung haben, kommt das Verfahren zu guten Ergebnissen.

Durch den Ansatz (2.3) schränken wir die Menge der möglichen Funktionen aus $D(J)$ ein. Sei nun U_n die Menge der durch den n -gliedrigen Ansatz (2.3) gegebenen Funktionen u . Wir erweitern jetzt den Ansatz um ein weiteres Glied

$$u = \sum_{i=1}^n a_i v_i + a_{n+1} v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i ,$$

so daß die Menge U_{n+1} aller Funktionen des $n+1$ -gliedrigen Ansatzes entsteht. Alle Elemente der Menge U_n sind nun auch Elemente von U_{n+1} , so daß gilt

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots \subset D(J) . \quad (2.5)$$

Bezeichnet u_i jeweils das minimale Element der Menge U_i ,

$$J[u_i] = \text{Min} \{J[u] : u \in U_i\} ,$$

so muß wegen (2.5)

$$J[u_1] \geq J[u_2] \geq J[u_3] \geq \dots \geq J[\varphi] \quad (2.6)$$

gelten. Die Existenz der Minima haben wir hierbei freilich vorausgesetzt.

Das Minimum des Funktionals muß mit wachsender Anzahl der Glieder im Ritzschen Ansatz (2.3) also fallen, höchstens kann es gleichbleiben. Das Letztere ist gerade dann der Fall, wenn sich bei der Erweiterung des Ansatzes um ein zusätzliches Glied der neue Koeffizient zu Null ergibt.

2.1.1 Näherung für die Eigenwertaufgabe

Nach Satz 1.5 (S.11) besitzt der Rayleigh-Quotient bei einem selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertproblem (1.1), (1.2) den kleinsten Eigenwert λ_1 als Minimum. Fassen wir den Rayleigh-Quotienten

$$R[u]$$

als das zu minimisierende Funktional auf, so können wir mit dem Ritzschen Verfahren den Eigenwert λ_1 und die zugehörige Eigenfunktion φ_1 näherungsweise berechnen. Der Definitionsbereich des Rayleigh-Quotienten $D(R)$ ist die Menge aller Vergleichsfunktionen V . Als Nebenbedingung müssen also die Randbedingungen (1.2)

$$U_i[u] = 0$$

erfüllt werden. Der Ansatz (2.3) genügt den Randbedingungen gerade dann, wenn jede der Koordinatenfunktionen v_i dies tut, also selbst Vergleichsfunktion ist.

Die Ritzschen Gleichungen lauten nun mit

$$R[u] = \frac{(u, u)_L}{(u, u)_M}$$

$$0 = \frac{\partial R}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{(u, u)_L}{(u, u)_M}, \quad i = 1 \dots n$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial a_i} (u, u)_L}{(u, u)_M} - \frac{(u, u)_L \frac{\partial}{\partial a_i} (u, u)_M}{(u, u)_M^2}$$

mit

$$\Lambda := R[u]$$

$$= \frac{1}{(u, u)_M} \left[\frac{\partial}{\partial a_i} (u, u)_L - \Lambda \frac{\partial}{\partial a_i} (u, u)_M \right]$$

$$\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_i} (u, u)_L = \Lambda \frac{\partial}{\partial a_i} (u, u)_M \quad (2.7)$$

Setzen wir für u den Reihenansatz ein und nutzen die Linearität der inneren Produkte aus, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\sum_{k=1}^n a_k v_k, \sum_{k=1}^n a_k v_k \right)_L = 2 \sum_{k=1}^n a_k (v_i, v_k)_L = 2 (v_i, u)_L$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\sum_{k=1}^n a_k v_k, \sum_{k=1}^n a_k v_k \right)_M = 2 \sum_{k=1}^n a_k (v_i, v_k)_M = 2 (v_i, u)_M$$

Damit kann (2.7) auch in der Form

$$(v_i, u)_L = \Lambda (v_i, u)_M \quad (2.7a)$$

geschrieben werden. Dies sind dann die Ritzschen Gleichungen in der „Galerkinschen Form“ (s. S.35).

Jetzt wird (2.7) unter Benutzung der Abkürzungen

$$l_{ik} := (v_i, v_k)_{L_k} L$$

und
$$m_{ik} := (v_i, v_k)_{M_k} M$$

zu
$$\sum_{k=1}^n l_{ik} a_k = \Lambda \sum_{k=1}^n m_{ik} a_k$$

Für alle i können wir dies als Matrixgleichung

$$\underline{L} \underline{a} = \Lambda \underline{M} \underline{a} \iff (\Lambda \underline{M} - \underline{L}) \underline{a} = 0 \quad (2.8)$$

mit den Matrizen $\underline{L} = (l_{ik})$, $\underline{M} = (m_{ik})$ und dem Vektor $\underline{a} = (a_k)$ schreiben. Die Matrizen \underline{L} und \underline{M} sind wegen der Selbstadjungiertheit symmetrisch, $l_{ik} = l_{ki}$ und $m_{ik} = m_{ki}$.

Nun stellt (2.8) gerade ein allgemeines Matrix-Eigenwertproblem dar. Als Bedingung für nichttriviale Lösungen \underline{a} muß die charakteristische Gleichung

$$\det (\Lambda \underline{M} - \underline{L}) = 0 \quad (2.9)$$

gelten, woraus sich wegen der symmetrischen Matrizen n reelle Lösungen

$$0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_n$$

des Matrix-Eigenwertproblem und die zugehörigen Eigenvektoren

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n$$

ergeben. Der Wert

$$\Lambda_1 = R \left[\sum_{k=1}^n a_{1k} v_k \right] \quad \text{mit } \underline{a}_i = (a_{ik})$$

ist nun sicher Näherung für den kleinsten Eigenwert

$$\lambda_1 \leq \Lambda_1$$

und
$$\sum_{k=1}^n a_{1k} v_k$$

damit Näherung für die Eigenfunktion φ_1 . Wie in [10] S. 537-539 gezeigt wird, sind aber sogar die weiteren Lösungen der Ritzschen Gleichungen Λ_i Näherungen für die höheren Eigenwerte,

$$\lambda_i \leq \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Durch die Vektoren \underline{a}_i sind die Koeffizienten der Näherungen für die Eigenfunktionen gegeben:

$$\varphi_i \approx \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k. \quad (2.11)$$

Damit die Näherungen für die höheren Eigenwerte und -funktionen einige Genauigkeit besitzen, kann als Faustregel gelten, daß der Ansatz (2.3) ein Glied mehr enthalten soll, als die Anzahl der zu berechnenden Eigenwerte beträgt. Dabei ist aber möglichst der auf S.18 geschilderte Aspekt der Wahl der Koordinatenfunktionen zu beachten.

Vergleiche zu diesem Abschnitt auch die Darstellung in [20] S.491 ff und S. 515 ff.

2.1.2 Variationsaufgaben und die Eulersche Differentialgleichung

Es soll der Zusammenhang zwischen Variationsaufgaben und der Lösung von Differentialgleichungen hergestellt werden. (s. [4] S. 230 ff)

Die Variationsaufgabe habe die Form

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) \, dx \\ &+ A(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \Big|_a + B(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \Big|_b \\ &= \text{Extr.} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Zusätzlich sollen die linearen Randbedingungen

$$V_i[y] = 0, \quad i = 1 \dots k, \quad (2.13)$$

erfüllt werden. Die Terme A und B in (2.12) beziehen sich wie V_i auf die Ränder des Intervalls $[a, b]$.

Zur Ermittlung eines Extremums von (2.12), (2.13) machen wir jetzt den Ansatz

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon h(x), \quad (2.14)$$

wobei \tilde{y} und h die Randbedingungen (2.13) erfüllen. Ist nun \tilde{y} Lösung der Aufgabe (2.12), (2.13), so muß das Funktional

$$J[\tilde{y} + \varepsilon h]$$

an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Extremum besitzen und dies unabhängig von der Funktion h . Als notwendige Bedingung können wir für das Vorliegen eines Extremums unter der Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit schreiben (die Existenz nehmen wir an):

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} [\tilde{y} + \varepsilon h] \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.15)$$

Mit (2.12) lautet dies

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (F_y h + F_{y'} h' + F_{y''} h'' + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m)}) dx \\ &+ (A_y h + A_{y'} h' + A_{y''} h'' + \dots + A_{y^{(m-1)}} h^{(m-1)}) \Big|_{x=a} \\ &+ (B_y h + B_{y'} h' + B_{y''} h'' + \dots + B_{y^{(m-1)}} h^{(m-1)}) \Big|_{x=b} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dabei bedeutet kurz

$$F_y(i) = \frac{\partial F}{\partial y(i)} (x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(m)})$$

und entsprechend $A_y(i)$ und $B_y(i)$.

Formen wir zuerst das Integral aus (2.16) durch mehrmalige partielle Integration um:

$$\begin{aligned} &\int_a^b (F_y h + F_{y'} h' + F_{y''} h'' + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m)}) dx \\ &= \int_a^b (F_y h - F_{y'} h - F_{y''} h' + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-1)}) dx \\ &\quad + [F_{y'} h + F_{y''} h' + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-1)}]_a^b \\ &= \int_a^b (F_y h - F_{y'} h + F_{y''} h + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-2)}) dx \\ &\quad + [F_{y'} h + F_{y''} h' + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-1)}]_a^b \\ &\quad - [F_{y''} h + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-2)}]_a^b \\ &= \int_a^b (F_y h - F_{y'} h + F_{y''} h - \dots \pm F_{y^{(m)}} h) dx \\ &\quad + \tilde{S} \end{aligned}$$

$$= \int_a^b (F_y - F_{y'} + F_{y''} - F_{y'''} + \dots \pm F_{y^{(m)}}) h \, dx + \tilde{S}.$$

Ausführlich geschrieben ist

$$F_{y^{(j)}} = \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial F}{\partial y^{(j)}} (x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(m)})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{S} := & \left[F_{y'} h + F_{y''} h' + F_{y'''} h'' + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-1)} \right. \\ & - F_{y''} h - F_{y'''} h' - \dots - F_{y^{(m)}} h^{(m-2)} \\ & \quad + F_{y'''} h + \dots + F_{y^{(m)}} h^{(m-3)} \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \left. \pm F_{y^{(m-1)}} h \right]_a^b. \end{aligned}$$

Dann wird (2.16) zu

$$\begin{aligned} 0 = & \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots \pm \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}}) h \, dx \\ & + S, \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei

$$\begin{aligned} S := & \tilde{S} + (A_y h + A_{y'} h' + A_{y''} h'' + \dots + A_{y^{(m-1)}} h^{(m-1)}) \Big|_a \\ & + (B_y h + B_{y'} h' + B_{y''} h'' + \dots + B_{y^{(m-1)}} h^{(m-1)}) \Big|_b \end{aligned} \quad (2.18)$$

S ist ein Ausdruck, in dem die von A und B und die von den partiellen Integrationen herrührenden Randterme zusammengefaßt sind. Hierin treten \tilde{y} und h mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung m-1 auf.

Damit (2.17) zu Null wird, muß jeweils allein sowohl das Integral als auch S Null werden. Es ist nicht möglich, daß (2.17) erst in der Summe verschwindet, da wir die Funktion h als beliebig angesetzt haben.

Aus dem gleichen Grund muß nun nicht nur das Integral verschwinden, sondern selbst der Integrand. Als notwendige Bedingung gilt dann die Differentialgleichung

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots \pm \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}} = 0 \quad (2.19)$$

Dies ist die Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung. Der Differentialausdruck in (2.19) wird auch als Variationsableitung von F nach y ,

$$[F]_y = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots \pm \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}} \quad (2.20)$$

bezeichnet.

Als zweites muß der Term S verschwinden. Wir ordnen die Summanden in S nach den Ableitungen von h :

$$\begin{aligned} S = & \left[(F_{y'} - F_{y''} + F_{y'''} - \dots \pm F_{y^{(m-1)}} + B_y) h \right. \\ & + (F_{y''} - F_{y'''} + \dots \mp F_{y^{(m-2)}} + B_{y'}) h' \\ & + (F_{y'''} - \dots \pm F_{y^{(m-3)}} + B_{y''}) h'' \\ & \quad \vdots \\ & \left. + (F_{y^{(m)}} + B_{y^{(m-1)}}) h^{(m-1)} \right]_b \\ & + \left[\dots \right]_a \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Terme für den Rand $x = a$ sind fortgelassen. Bis auf ein verändertes Vorzeichen haben sie dasselbe Aussehen wie die Ausdrücke für den Rand $x = b$.

Die Funktion h tritt in (2.21) mit ihren Ableitungen jeweils am linken und rechten Rand auf; das sind $2m$ verschiedene Terme. Durch die Randbedingungen (2.13) können davon einige durch andere Ableitungen ausgedrückt werden. Die verbleibenden Ableitungen von h können dann frei gewählt werden, so daß S nur verschwinden kann, wenn die Koeffizienten vor diesen Ableitungen einzeln zu Null werden. Dies sind nun neue Forderungen an die Lösungsfunktion \tilde{y} und damit an jede Funktion y , unter denen die Lösung ermittelt werden soll:

$$W_i[y] = 0, \quad i = 1 \dots j \leq 2m. \quad (2.22)$$

Diese Bedingungen werden als „natürliche Randbedingungen“ bezeichnet und treten zu den schon vorliegenden Randbedingungen (2.13). Zusammen sind dies nun $k+j$ Bedingungen, unter denen jedoch einige linear abhängig sein können, so daß wir (2.13) und (2.22) zu

$$U_i[y] = 0, \quad i = 1 \dots l \leq k+j \quad (2.23)$$

zusammenfassen.

Wir haben die Variationsaufgabe (2.21), (2.13) nun auf die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (2.19) überführt. Zu den Randbedingungen der Variationsaufgabe (2.13) sind weitere hinzugetreten, (2.22), so daß wir bei der Lösung der Differentialgleichung (2.19) jetzt die Randbedingungen (2.23) zu beachten haben. Die Differentialgleichung war jedoch nur eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums der Variationsaufgabe.

Die zusätzlichen, natürlichen Randbedingungen (2.22) entstanden aus der Forderung $S = 0$. Da in den Term S auch die Ausdrücke A und B der Variationsaufgabe (2.12) eingegangen sind, wird es in manchen Fällen möglich sein, daß sich bei einer speziellen Form der Ausdrücke A und B keine zusätzlichen Randbedingungen ergeben. Das heißt, daß dann die Randbedingungen (2.22) bereits vollständig in (2.13) enthalten sind.

2.1.3 Die Umkehrung der Fragestellung der Variationsrechnung

Im vorherigen Abschnitt wurde die Lösung einer Variationsaufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung unter veränderten Randbedingungen zurückgeführt. Kehren wir jetzt die Fragestellung um und suchen zu einer gegebenen Differentialgleichung eine zugehörige Variationsaufgabe. Gelingt dies, können wir eine Näherungslösung der Differentialgleichung erhalten, indem wir mit dem oben beschriebenen Ritzschen Verfahren die zugehörige Variationsaufgabe bearbeiten.

Es liegt die Randwertaufgabe mit der Differentialgleichung

$$G[y] = G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.24)$$

und den linearen Randbedingungen

$$U_i[y] = 0, \quad i = 1 \dots l \quad (2.25)$$

vor.

Der Zusammenhang der Variationsaufgabe (2.12) und der Differentialgleichung (2.24) ist durch die Eulersche Differentialgleichung (2.19) gegeben:

$$G(x, y, y', \dots) = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots \quad (2.26)$$

Ein Problem ist jetzt das Auffinden des Differentialausdruckes F für die Variationsaufgabe (2.12). Wir können versuchen, die Differentialgleichung (2.24) in der Form der Eulerschen Differentialgleichung zu schreiben und dadurch den Ausdruck für F zu erhalten. Da nicht jede Differentialgleichung in der Form der Eulerschen geschrieben werden kann, ist es bereits klar, daß es nicht in jedem Falle eine zugehörige Variationsaufgabe geben kann.

Ein weiteres Problem sind die Randbedingungen. Will man den Gang der Rechnung umkehren, so muß man (2.25) auf die Randbedingungen (2.13) der Variationsaufgabe und auf die natürlichen Randbedingungen (2.22) verteilen. Einfach wäre es, alle Bedingungen (2.25) als (2.13) zu übernehmen und dafür zu sorgen, daß auch die natürlichen Randbedingungen (2.22) diesen entsprechen. Zu diesem Zweck müssen dann die Ausdrücke A und B in (2.12) entsprechend gewählt werden. Siehe auch die Bemerkung am Ende des letzten Abschnittes (S. 27 unten).

Es sollen nun spezielle Voraussetzungen angegeben werden, unter denen eine zugehörige Variationsaufgabe (2.12), (2.13) zu der Randwertaufgabe (2.24), (2.25) existiert.

Die Randwertaufgabe (2.24), (2.25) sei selbstadjungiert, das heißt, daß ganz analog zu der Definition bei Eigenwertaufgabe, (1.6a), (1.6b), für das innere Produkt

$$(u, G[v]) = (G[u], v) \quad (2.27)$$

gilt. Hierbei sind u und v wieder beliebige Vergleichsfunktionen, die die Randbedingungen (2.25) erfüllen und genügend oft differenzierbar sind.

Weiterhin sei

$$(u, G[u]) \geq 0 \quad (2.28)$$

für alle Vergleichsfunktionen. Die Randwertaufgabe ist dann positiv semidefinit.

Satz 2.1: Die Randwertaufgabe (2.24), (2.25) sei linear, selbstadjungiert und positiv semidefinit. Die über die Eulersche Differentialgleichung zugeordnete Variationsaufgabe ist dann

$$J[y] = \frac{1}{2} (u, G[u]) = \frac{1}{2} \int_a^b u G[u] dx = \text{Min.} \quad (2.29)$$

mit den Randbedingungen (2.25)

$$V_i[y] = U_i[y] = 0 \quad (2.30)$$

Beweis: Zuerst wird gezeigt, daß die Lösung von (2.29), (2.30) wieder auf die Randwertaufgabe (2.24), (2.25) führt.

Wir setzen wieder

$$y = \tilde{y} + \varepsilon h$$

an und erhalten aus (2.29) wegen der Linearität

$$\begin{aligned} J[y] &= \frac{1}{2} (\tilde{y} + \varepsilon h, G[\tilde{y} + \varepsilon h]) \\ &= \frac{1}{2} ((\tilde{y}, G[\tilde{y}]) + (\tilde{y}, G[\varepsilon h]) + (\varepsilon h, G[\tilde{y}]) + (\varepsilon h, G[\varepsilon h])). \end{aligned}$$

$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}$ muß an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Minimum besitzen, außerdem beachten wir die Selbstadjungiertheit:

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = (h, G[\tilde{y}]) = \int_a^b h G(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots) dx = 0. \quad (2.31)$$

Da h wieder beliebig war, folgt

$$G[\tilde{y}] = 0$$

Dies ist die ursprüngliche Differentialgleichung (2.24). In (2.31) taucht nicht der Ausdruck S wie in (2.17) auf; es ergeben sich also keine zusätzlichen natürlichen Randbedingungen, so daß die Übernahme der Randbedingungen (2.25) als die der Variationsaufgabe, (2.30), berechtigt ist.

Die Eulersche Differentialgleichung (1.19) war notwendige Bedingung für eine Lösung der Variationsaufgabe. Existiert also eine Lösung der Variationsaufgabe, so ist sie gewiß auch unter den Lösungen der Differentialgleichung. Kehren wir die

Fragestellung um, so ist es zunächst nicht sicher, ob eine Lösung der Differentialgleichung auch eine Lösung der Variationsaufgabe ist. Da wir jedoch die Semidefinitheit der Randwertaufgabe (2.24), (2.25) gefordert haben, ist es zwingend, daß das Funktional (2.29) für eine Lösung der Differentialgleichung tatsächlich das Minimum

$$J[\varphi] = 0$$

annimmt.

Die Variationsaufgabe (2.29), (2.30) hat nun anscheinend nicht die Form der Aufgabe (2.12), (2.13). In (2.29) treten Ableitungen so hoher Ordnung auf, wie sie auch in der Differentialgleichung (2.24) vorkommen, während das Funktional (2.12) nur Ableitungen halb so hoher Ordnung wie die zugehörige Differentialgleichung beinhaltet. Wir können aber trotzdem (2.29) in der Form von (2.12) schreiben, was jedoch nur verbal erläutert werden soll:

Die höchste Ableitung in (2.24) ist von der Ordnung n . Es ist nicht möglich, daß n ungerade ist, da sonst die Randwertaufgabe nicht selbstadjungiert sein kann. Wir können $n = 2m$ schreiben. Durch mehrfache partielle Integration von (2.29) erreichen wir, daß in dem Integral nur noch Ableitungen bis zur Ordnung m auftreten. Dafür ergeben sich Randterme mit Ableitungen bis zu Ordnung $2m-1$. Durch die vorliegenden Randbedingungen (2.30) können die höheren Ableitungen in den Randtermen ersetzt werden. Es zeigt sich, daß dann nur noch Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ in den Randausdrücken auftauchen.

Dies entspricht dann genau der Form (2.12), in der im Integral die Ableitungen bis zur Ordnung m und in den Randausdrücken A und B bis zur Ordnung $m-1$ auftreten.

Besonders einfach wird die Angabe des Integrals der Variationsaufgabe, wenn die selbstadjungierte, positiv semidefinite Differentialgleichung bereits in der „selbstadjungierten Form“

$$G[y] = \sum_{i=0}^n (a_i(x) y^{(i)})' \quad (2.32)$$

vorliegt. Dann wird F in (2.12) zu

$$F[y] = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)2} \quad (2.33)$$

Die Bestimmung von A und B in (2.12) muß trotzdem noch vorgenommen werden.

Beispiel: Wir suchen zu der selbstadjungierten Randwertaufgabe

$$a_0(x) y - (a_1(x) y')' = 0,$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

(vgl. S.3) die zugehörige Variationsaufgabe. Wir bilden

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b y (a_0 y - (a_1 y')') dx \\ &= \int_a^b (a_0 y^2 + a_1 y'^2) dx + [y a_1 y']_a^b \\ &= \int_a^b (a_0 y^2 + a_1 y'^2) dx + a_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y|_a - a_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} y|_b. \end{aligned}$$

Die Semidefinitheit erkennen wir direkt aus dem Funktional.

Die Randwertaufgabe ist für

$$a_0(x), a_1(x), \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, -\frac{\beta_1}{\beta_2} \geq 0$$

positiv semidefinit.

Bemerkung: Eine zu einer Randwertaufgabe gehörige Variationsaufgabe braucht nicht unbedingt wie oben über die Eulersche Differentialgleichung aufgesucht werden. Vielfach ergibt sich eine Variationsaufgabe schneller durch Aufstellen entsprechender physikalischer Energieausdrücke oder auch durch ein „Fehlerquadrat“

$$J[y] = \int_a^b (G[y])^2 dx \quad . \quad (2.34)$$

Hier werden keine einschränkenden Voraussetzungen an die Randwertaufgabe gestellt, insbesondere kann sie auch nichtlinear sein.

2.1.4. Näherung von Randwertaufgaben mit dem Ritzschen Verfahren

Nehmen wir an, es liegen die Voraussetzungen an eine Randwertaufgabe des Satzes 2.1 (S.29) vor. Dann gibt es über die Eulersche Differentialgleichung die zugehörige Variationsaufgabe (2.29), (2.30), so daß wir jetzt darauf das Ritzsche Verfahren anwenden können. Es ist zu erwarten, daß eine Näherungslösung der Variationsaufgabe auch eine Näherungslösung der Randwertaufgabe ist.

Die Ritzschen Gleichungen lauten dann mit dem Ansatz (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{2} (u, G[u]) = 0, \quad i = 1 \dots n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, G \left[\sum_{i=1}^n a_i v_i \right] \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (v_i, G \left[\sum_{i=1}^n a_i v_i \right]) = (v_i, G[u]) = 0.$$

In den Randbedingungen taucht das Funktional der Variationsaufgabe nicht mehr auf, das bedeutet, es ist gar nicht notwendig, die Variationsaufgabe explizit zu bestimmen, sondern wir können gleich die Ritzschen Gleichungen in der „Galerkinschen Form“

$$(v_i, G[u]) = \int_a^b v_i G[u] dx = 0 \quad (2.35)$$

anschreiben. Obwohl die Variationsaufgabe nicht mehr bekannt sein muß, ist es gleichwohl notwendig, daß diese existiert.

2.2 DAS GALERKINSCHES VERFAHREN

Sowohl bei der Aufgabe den Rayleigh-Quotienten eines selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertproblems zu minimieren (s. S. 19 ff) als auch bei der Näherung einer selbstadjungierten, positiv semidefiniten Randwertaufgabe (S. 34) durch Aufstellung der zugehörigen Variationsaufgabe ergaben sich mit dem Ritzschen Ansatz (2.3)

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i(x)$$

die Ritzschen Gleichungen in der Galerkinschen Form (2.7a) und (2.35):

$$(v_i, G[u]) = \int_a^b v_i G[u] dx = 0, \quad i=1 \dots n. \quad (2.36)$$

Hierbei soll G entweder der Differentialoperator einer Randwertaufgabe sein oder eine Eigenwertaufgabe wiedergeben:

$$G[y, \lambda] = L[y] - \lambda M[y]. \quad (2.37)$$

Die Koordinatenfunktionen v_i erfüllen die entsprechenden Randbedingungen.

Unter den oben angegebenen Bedingungen lassen sich als Ritzsche Gleichungen sofort die einfacheren Galerkinschen Gleichungen anschreiben. Die Galerkinschen Gleichungen behalten aber auch dann noch ihre Berechtigung, wenn die angegebenen Bedingungen nicht mehr vorliegen. Also z.B. dann, wenn einer Randwertaufgabe keine Variationsaufgabe mehr entspricht.

Dies kann man folgendermaßen begründen: Durch das innere Produkt

$$(u, G[u]) \quad (2.38)$$

definieren wir uns eine Art Fehler. Das innere Produkt kann

auch negativ werden, für eine Lösung der Eigenwertaufgabe oder der Randwertaufgabe ist es Null. Umgekehrt kann man aus dem Verschwinden des inneren Produktes (2.38) nicht schließen, daß u eine Lösung wäre. Immerhin kann man (2.38) als Maß für eine Abweichung ansehen und fordern, daß für eine Näherungslösung u (2.38) verschwindet:

$$(u, G[u]) = 0 .$$

Setzen wir für u den Reihenansatz ein, folgt

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i , G[u] \right) = 0 \quad \leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n a_i (v_i, G[u]) = 0$$

(2.38) wird dann zu Null, wenn jeder einzelne Summand Null wird. Aus dieser Forderung ergeben sich die Galerkinschen Gleichungen (2.36)

$$(v_i, G[u]) = 0 .$$

Es ergibt sich also, daß die Koeffizienten a_i so gewählt werden müssen, daß der Ausdruck $G[u]$ orthogonal zu jeder einzelnen Koordinatenfunktion wird.

Auf einen wichtigen Sonderfall sei noch hingewiesen: Bearbeitet man mit dem Galerkinschen Verfahren eine selbstadjungierte Eigenwertaufgabe und setzt im Ansatz (2.3) als Koordinatenfunktionen Eigenfunktionen an, so sind diese nach Satz 1.3 (s. 7) im verallgemeinerten Sinne orthogonal. Dies führt dazu, daß sich das Gleichungssystem (2.36) entkoppelt und aus jeder Gleichung genau ein a_i bestimmt werden kann.

Mit dem Galerkinschen Verfahren haben wir eine Möglichkeit in der Hand, auch bei komplizierten Problemen durch einen einfachen Ansatz eine brauchbare Näherungslösung zu erhalten.

2.3 BEISPIELE

2.3.1 Die Durchbiegung des belasteten Stabes

Als Beispiel für die Anwendung des Galerkinschen Verfahrens soll die statische Auslenkung eines in seiner Längsrichtung belasteten, gelenkig gelagerten Stabes oder Balkens berechnet werden. Dabei soll das Eigengewicht des Stabes Berücksichtigung finden. Vergleiche dazu auch die Rechnungen von v. Mises und Szabó, [12] und [16], S.313ff, die das Verfahren nach Galerkin jedoch nicht anwenden.

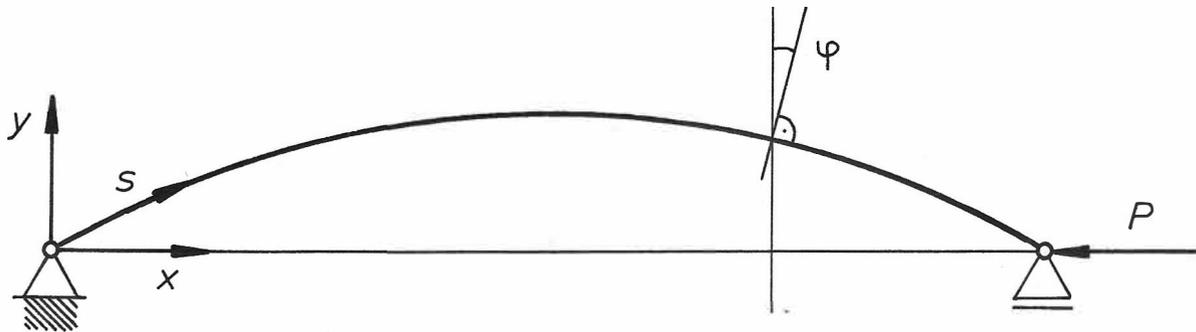


Bild 1.

P ist die einwirkende Kraft, $y(s)$ die Auslenkung des Stabes an der Stelle s . Der Abhängigkeit von der Bogenlänge s wird gegenüber der von der Koordinate x der Vorzug gegeben, da dann die einfachen Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

mit der Gesamtlänge des Stabes l auftreten.

Zur beschreibenden Differentialgleichung gelangt man durch „Freischneiden“ und Aufstellen der Momentengleichung für den Punkt s :

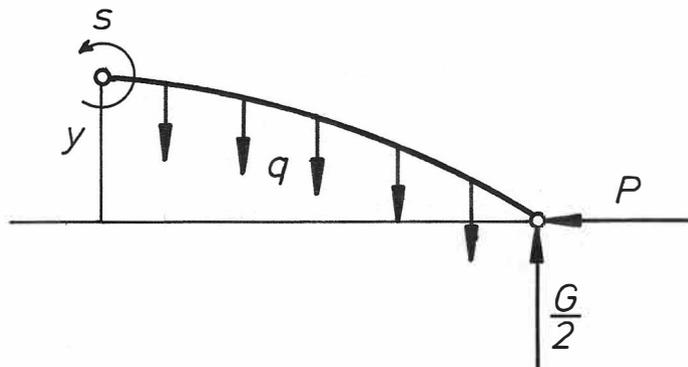


Bild 1a.

$$M_B + M_P + M_G = 0 \quad (2.39)$$

Das Biegemoment M_B ist proportional der Krümmung κ

$$M_B = -\kappa E J \quad (2.40)$$

E ist der Elastizitätsmodul und J das Flächenträgheitsmoment. Das Moment M_P in Folge der angreifenden Kraft P ist

$$M_P = -y P \quad (2.41)$$

Schließlich ergibt sich für das Moment M_G auf Grund des Eigengewichtes G

$$M_G = -q \int_s^l (\sigma - s) d\sigma + \frac{1}{2} G (l-s)$$

Hierbei ist q das Gewicht je Längeneinheit des Stabes. Der obige Term für dieses Moment gilt streng nur für den nicht ausgelenkten Stab. Er sei jedoch auch als Näherung für kleine Auslenkungen übernommen, da sonst ein komplizierter Integralterm entsteht. Mit $G = q l$ formen wir weiter um:

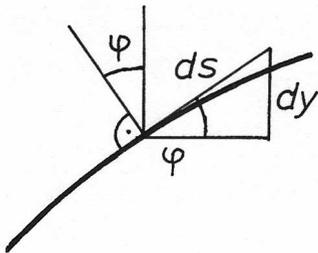
$$\begin{aligned} M_G &= -q \left[\frac{1}{2} \sigma^2 - \sigma s \right]_s^l + \frac{1}{2} q l (l-s) \\ M_G &= q \left[-\frac{1}{2} l^2 + ls + \frac{1}{2} s^2 - s^2 - \frac{1}{2} ls + \frac{1}{2} l^2 \right] \\ M_G &= \frac{1}{2} q s (l-s) \quad (2.42) \end{aligned}$$

Zusammenfassend schreiben wir

$$-\kappa E J - y P + \frac{q}{2} s (l-s) = 0 \quad (2.43)$$

und $y(0) = 0$, $y(l) = 0$. (2.44)

Die Krümmung κ muß noch durch y ausgedrückt werden. Für den Winkel φ lesen wir aus der Zeichnung ab:



$$\sin \varphi = \frac{dy}{ds} .$$

Bild 2.

Wir differenzieren nach der Bogenlänge und erhalten

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

und daraus

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d^2y}{ds^2} .$$

Mit $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$

ergibt sich für die Krümmung

$$\kappa = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} , \quad (2.45)$$

so daß die Differentialgleichung jetzt

$$\frac{y''}{\sqrt{1 - y'^2}} EJ + Py - \frac{q}{2} s(1-s) = 0 \quad (2.46)$$

lautet. Dies kann man zusammen mit den Randbedingungen als eine nichtlineare Eigenwertaufgabe auffassen. Der Eigenwert ist dann die Kraft P (oder üblicherweise $\frac{P}{EJ}$).

Mit
$$\frac{1}{\sqrt{1 - y'^2}} = 1 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{3}{8}y'^4 + \dots \quad (2.47)$$

wird aus der Differentialgleichung

$$y'' \left(1 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{3}{8}y'^4 + \dots \right) E J + P y - \frac{q}{2} s (1-s) = 0.$$

Nähern wir die Reihe nur grob durch das erste Glied an, geht die Differentialgleichung für $q = 0$ in die bekannte Näherung der linearen Elastizitätstheorie

$$- y'' = \frac{P}{E J} y \quad (2.48)$$

über. Diese lineare Aufgabe hat unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2.44) die Lösungen

$$\begin{aligned} P_1 &= EJ \frac{\pi^2}{l^2} & , & \quad \varphi_1(x) = \sin \frac{\pi s}{l} & , \\ P_2 &= EJ \frac{4\pi^2}{l^2} & , & \quad \varphi_2(x) = \sin \frac{2\pi s}{l} & , \\ & \vdots & & & \end{aligned}$$

Vergleiche dazu auch das Beispiel auf S. 9. Diese Lösungen sind nun die physikalisch eigentlich wenig sinnvolle Aussage, daß der Stab nur für diskrete Werte P_i eine Auslenkung erfährt, die Größe der Auslenkung dabei auch noch unbestimmt ist, da jede Funktion $a\varphi_i$ Lösung ist. Immerhin läßt sich das erstmalige Ausknicken des Stabes gut bestimmen; die dazu notwendige Kraft P_1 wird als Eulersche Knicklast

$$P_k = E J \frac{\pi^2}{l^2} \quad (2.49)$$

bezeichnet.

Die Reihe (2.47) soll jetzt erst nach dem zweiten Glied abgebrochen werden, wodurch wir eine bessere Aussage erwarten dürfen. Die Aufgabe lautet dann mit der Substitution

$$t = \frac{\pi s}{l}$$

und unter Berücksichtigung der Terme für P_k und G

$$\frac{\pi^2}{l^2} y'' \left(1 + \frac{\pi^2}{2l^2} y'^2 \right) EJ + P y - \frac{G}{2} \frac{1}{\pi} t \left(1 - \frac{1}{\pi} t \right) = 0$$

$$\leftrightarrow y'' \left(1 + \frac{\pi^2}{2l^2} y'^2 \right) + \frac{P}{P_k} y - \frac{G}{P_k} \frac{1}{2\pi^2} t (\pi - t) = 0 \quad (2.50)$$

und $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Auf eine neue Bezeichnung der Auslenkung y , die jetzt von der substituierenden Variablen t abhängt, sei verzichtet. Der Strich ' bedeutet hier also die Differentiation nach t .

Wir machen jetzt den eingliedrigen Näherungsansatz

$$y(t) = y_m \sin t, \quad (2.51)$$

welcher den Randbedingungen genügt. Der Koeffizient y_m gibt die Verschiebung der Stabmitte in y -Richtung an. Obwohl der Ansatz nur aus einem Glied besteht, dürfen wir eine gute Näherung erwarten, da die gewählte Koordinatenfunktion $\sin t$ bereits Eigenfunktion des stärker vereinfachten Systems (2.48), (2.44) war.

Die Galerkinsche Gleichung (2.36) lautet nun

$$\int_0^{\pi} \sin t \left[-y_m \sin t \left(1 + \frac{\pi^2}{2l^2} y_m^2 \cos^2 t \right) + \frac{P}{P_k} y_m \sin t - \frac{G}{P_k} \frac{1}{2\pi^2} t (\pi - t) \right] dt$$

$$= 0$$

\leftrightarrow

$$\int_0^{\pi} \left[\left(\frac{P}{P_k} - 1 \right) y_m \sin^2 t - \frac{\pi^2}{21^2} y_m^3 \sin^2 t \cos^2 t - \frac{G}{P_k} \frac{1}{2\pi^2} t (\pi - t) \sin t \right] dt = 0.$$

Wir integrieren (Integrale s. [1]),

$$\left(\frac{P}{P_k} - 1 \right) \frac{\pi}{2} y_m - \frac{\pi^2}{21^2} \frac{\pi}{8} y_m^3 - \frac{G}{P_k} \frac{1}{2\pi^2} 4 = 0,$$

und erhalten eine kubische Gleichung zur Bestimmung von y_m , welches auf die Länge l bezogen wird:

$$\left(\frac{y_m}{l} \right)^3 = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{P}{P_k} - 1 \right) \frac{y_m}{l} - \frac{32}{\pi^5} \frac{G}{P_k} \quad (2.52)$$

Für $G = 0$ geht die Gleichung nach Division durch $\frac{y_m}{l}$ in

$$\frac{y_m}{l} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1} \quad (2.53)$$

über, was dasselbe Ergebnis darstellt wie das in [12] von v. Mises berechnete, zu dem wir hier aber auf anderem Wege gelangen.

Die Lösungen von (2.52) für nicht verschwindende Eigengewichte G lassen sich gut graphisch in Abhängigkeit der Parameter P und G ermitteln, da (2.52) geometrisch den Schnitt einer Parabel 3. Grades mit einer Geraden darstellt.

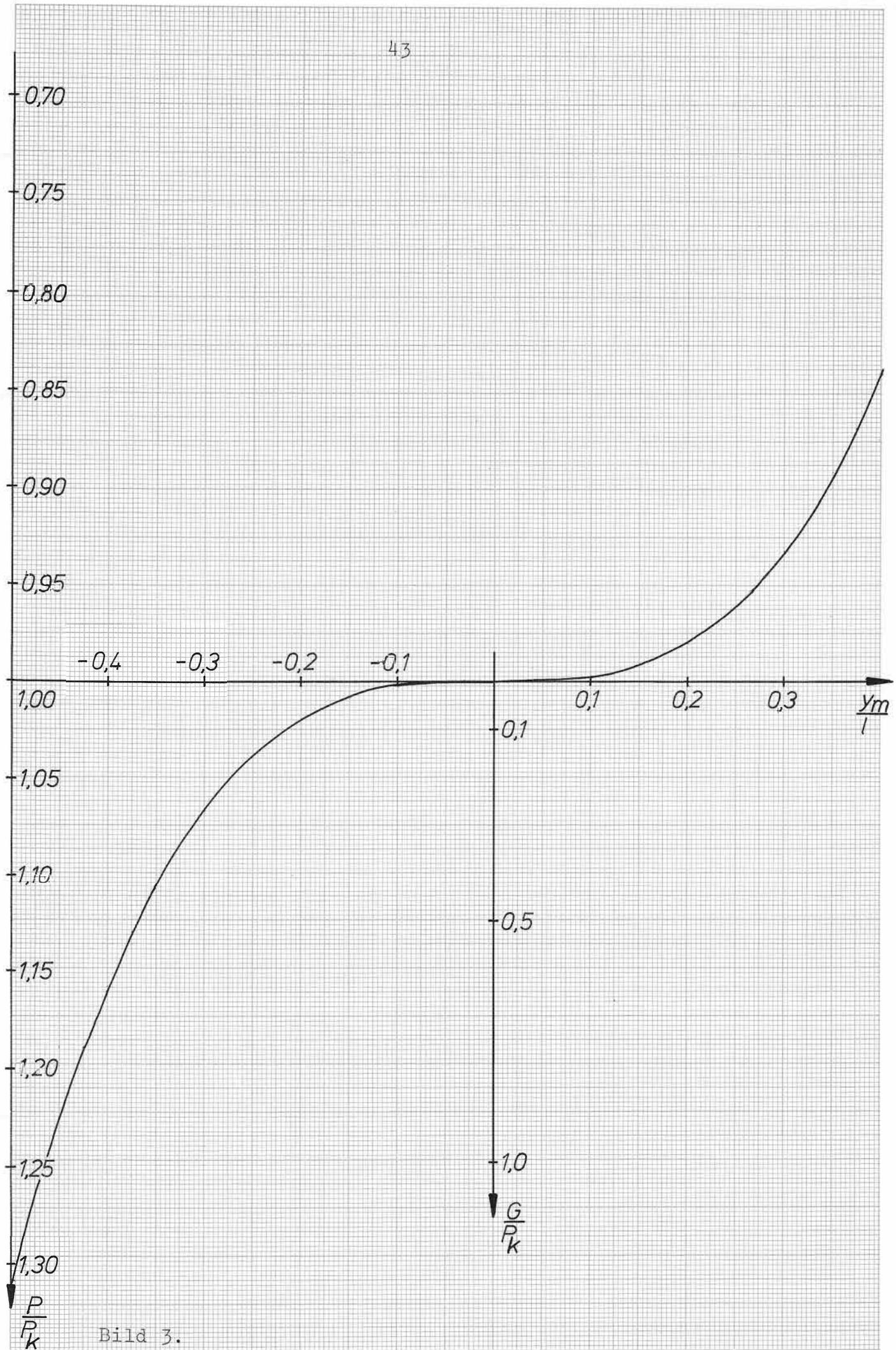


Bild 3.

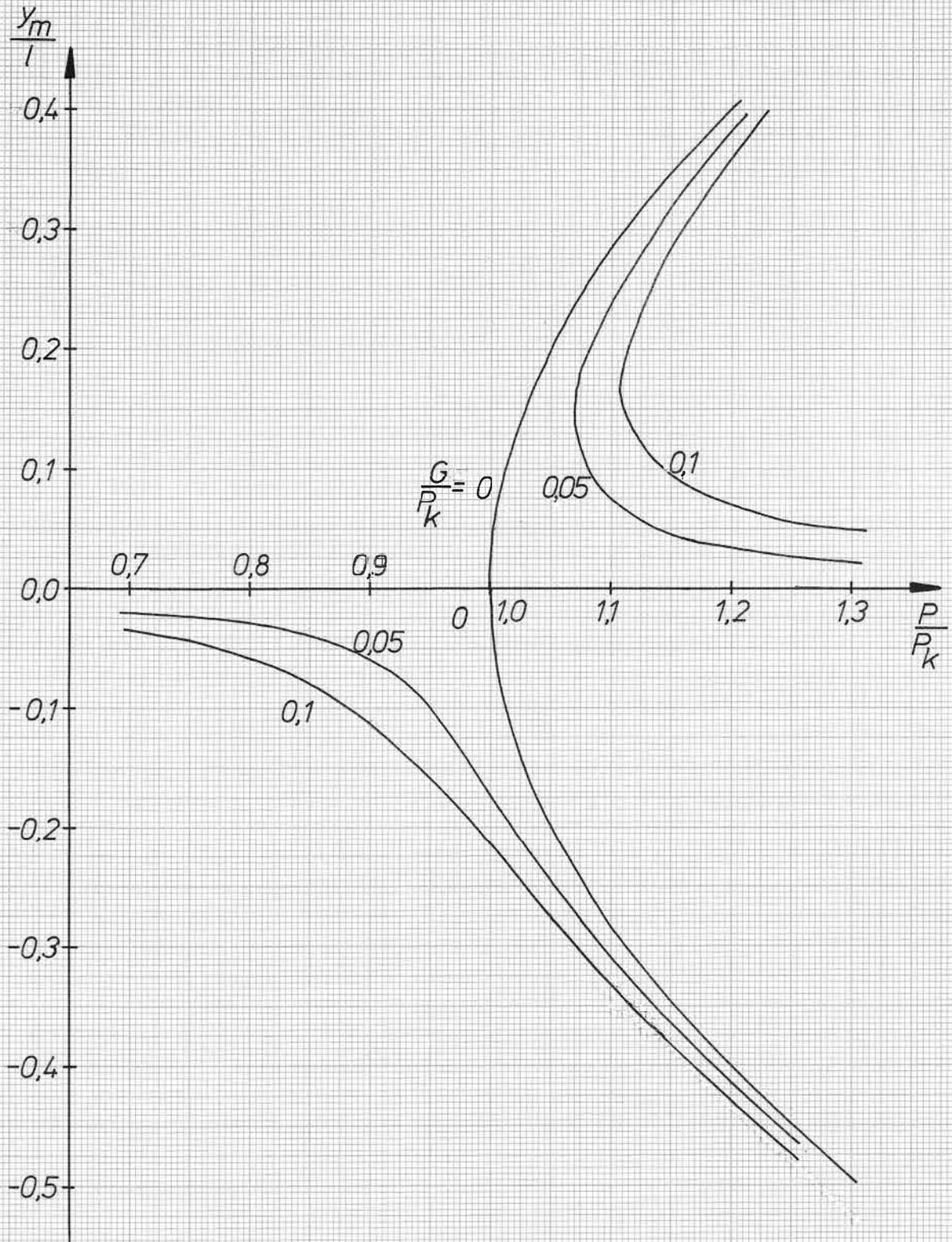


Bild 4.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Wurzeln von (2.52) an Hand des Bildes 3 sei an der unten stehenden Skizze erläutert.

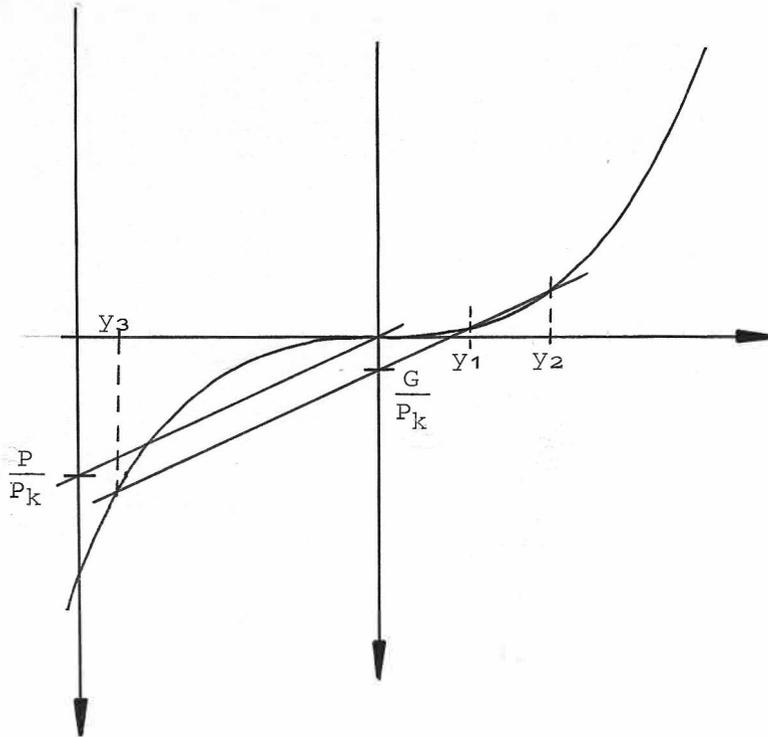


Bild 5.

Ein Winkel wird durch den Ursprung und den entsprechenden Wert $\frac{P}{P_k}$ gelegt. Durch ein weiteres Lineal verschiebt man den Winkel parallel, bis der gewünscht Wert $\frac{G}{P_k}$ der mittleren senkrechten Achse getroffen wird. Lotet man die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Parabel auf die Abzisse, sind dort unmittelbar die Wurzeln $\frac{y_m}{l}$ abzulesen.

Durch eine derartige punktweise Konstruktion entsteht das Bild 4. $\frac{y_m}{l}$ ist über $\frac{P}{P_k}$ aufgetragen, $\frac{G}{P_k}$ ist der Parameter der Kurvenschar. Eine Überprüfung einzelner Wurzeln mit Hilfe der Cardanischen Formel ergab, daß die Genauigkeit dieser graphischen Konstruktion durchaus hoch anzusetzen ist; der Graph in Bild 4 wies Abweichungen von unter 1 mm auf, das entspricht einem Fehler von $\frac{y_m}{l}$ in der Größenordnung von 0,005, was angesichts der Vernachlässigungen bei der Aufstellung der Differentialgleichung voll befriedigen sollte.

Ergibt sich nur eine reelle Wurzel als Lösung von (2.52), so entspricht dies dem normalen „Durchhängen“ des belasteten Stabes oder Balkens nach unten.

Interessanter ist der Fall, bei dem sich drei reelle Lösungen ergeben: Die kleinste Lösung für y_m unter diesen entspricht weiterhin dem Durchhängen des Balkens, die größte gibt die Form eines nach oben vorgespannten Bogens an (vergleichbar einem „Stützbogen“). Die „mittlere“ unter den drei Lösungen entspricht aber einer Form des Balkens, die „nicht stabil“ sein kann. Der Begriff der „Stabilität“ bezieht sich auf das dynamische Verhalten: Bei einer kleinen Störung der (Ruhe-) Lage des Balkens verläßt die Form eine Umgebung der Ruhelage nicht oder kehrt auch in diese zurück. Obwohl hier gar keine dynamische sondern nur eine statische Betrachtung durchgeführt wurde, läßt sich die „Instabilität“ doch von der praktischen Anschauung begründen:

Nehmen wir einen gewichtslosen Balken an, der in der Mitte geringfügig gegen seitliches Ausweichen gestützt wird (mit einer Strebe). Erhöhen wir nun die Längskraft P auch über die Knicklast P_k hinaus, so wird der Balken doch nicht ausknicken, obwohl die Strebe keine große Kraft aufnehmen muß. Gleichwohl bricht der Balken beim Wegfall der Strebe seitlich aus.

In Bild 6 entsprechen die beiden dick gezeichneten Linien den stabilen Lagen des Stabes oder Balkens, die Gestrichelte deutet die Instabile an.

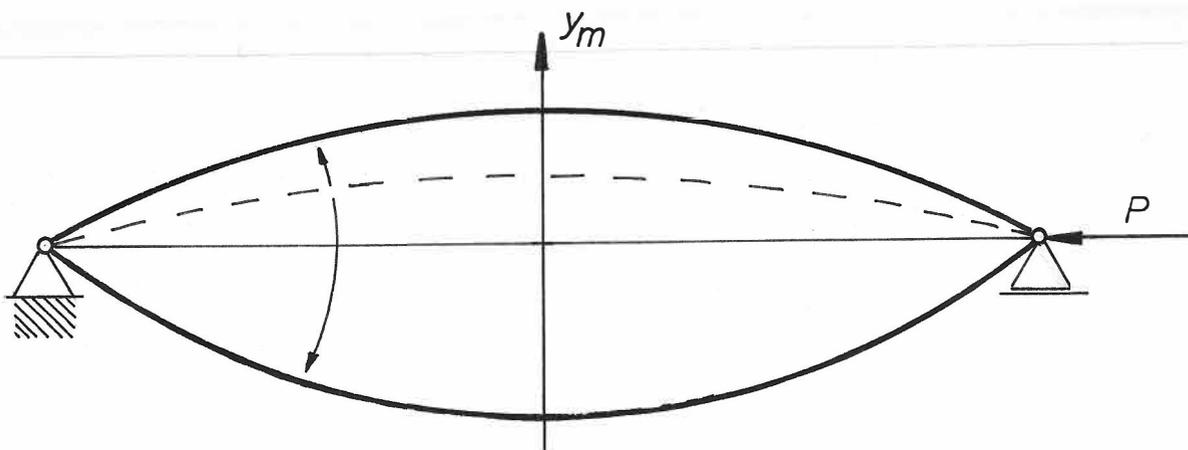


Bild 6.

Bemerkung: Zwar wurde stets von dem „Eigengewicht“ G gesprochen, doch kann das Gewicht natürlich auch von einer gleichmäßigen fremden Last auf dem Balken herrühren.

Mit der auch schon unter Vernachlässigungen entstandenen Differentialgleichung (2.50) haben wir mit dem sehr einfachen Ansatz (2.51) für das Galerkinsche Verfahren doch bereits genauere Einblicke in das statische Verhalten des belasteten Stabes oder Balkens gewinnen können. Auch läßt sich z.B. die Frage nach dem Durchschlagen des nach oben vorgespannten Balkens mit den obigen Überlegungen beantworten, obwohl wir nur eine statische Betrachtung durchgeführt haben.

Die Ergebnisse dieses nicht sehr aufwendigen Weges erklären das mechanische Verhalten weit besser als die Lösung der linearen Näherung (2.48).

2.3.2 Das durchströmte Rohr

Als weiteres Beispiel, in dem das Verfahren nach Galerkin angewendet werden soll, sei ein durchströmtes Rohr untersucht. Dafür gibt Roth [15] die Differentialgleichung

$$L[y] = EJ y'''' + (P + \epsilon f(t)) y'' + 2v\mu_F \dot{y}' + \mu \ddot{y} + k \dot{y} = 0 \quad (2.54)$$

an. Dabei ist $P + \epsilon f(t)$ eine pulsierende Längskraft, v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Inneren des Rohres, μ_F die Dichte der Flüssigkeit, μ die gesamte Dichte des Rohres, ρ die Dämpfung und k die elastische Bettungsziffer des Rohres. Die letzten Größen sind jeweils auf eine Längeneinheit bezogen. Hier liegt im Gegensatz zu vorherigen Beispiel eine partielle Differentialgleichung vor. Wir machen für die Ortskoordinate trotzdem wieder denselben Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) v_i(x) \quad , \quad (2.55)$$

wodurch die Koeffizienten a_i notwendigerweise Funktionen der Zeit werde. In dieser Form ähnelt der Ansatz dem Bernoullischen Produktansatz zur Separation von partiellen Differentialgleichungen.

Diesmal wählen wir einen viergliedrigen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen,

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^4 a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{1} \quad , \quad (2.56)$$

die den Randbedingungen des beidseitig drehbar gelagerten Rohres,

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \quad , \quad y''(0) = 0 \quad , \quad y''(1) = 0 \quad , \quad (2.57)$$

genügen.

Die Galerkinschen Gleichungen lauten nun

$$\int_0^1 \sin \frac{i\pi x}{1} L[u] dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Schreiben wir uns die benötigten Größen an:

$$u = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{l}$$

$$\dot{u} = \dot{a}_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \dot{a}_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dot{a}_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dot{a}_4 \sin \frac{4\pi x}{l}$$

$$\ddot{u} = \ddot{a}_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \ddot{a}_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ddot{a}_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \ddot{a}_4 \sin \frac{4\pi x}{l}$$

$$\dot{u}' = \frac{\pi}{l} \left[\dot{a}_1 \cos \frac{\pi x}{l} + 2\dot{a}_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + 3\dot{a}_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + 4\dot{a}_4 \cos \frac{4\pi x}{l} \right]$$

$$u'' = -\frac{\pi^2}{l^2} \left[a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 4a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + 9a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + 16a_4 \sin \frac{4\pi x}{l} \right]$$

$$u'''' = \frac{\pi^4}{l^4} \left[a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 16a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + 81a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + 256a_4 \sin \frac{4\pi x}{l} \right]$$

Beim Integrieren beachten wir nun gleich die folgenden Integrale:

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{l}{2} & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\text{und } \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n+m \text{ gerade} \\ \frac{l}{\pi} \frac{2n}{n^2 - m^2} & \text{für } n+m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit werden die Galerkinschen Gleichungen zu

$$\frac{1}{2} \left[EJ \frac{\pi^4}{14} a_1 - (P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} a_1 + \mu \ddot{a}_1 + \rho \dot{a}_1 + ka_1 \right] + 2v\mu_F \left(-\frac{2}{3} 2\dot{a}_2 - \frac{2}{15} 4\dot{a}_4 \right) = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \left[16EJ \frac{\pi^4}{14} a_2 - 4(P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} a_2 + \mu \ddot{a}_2 + \rho \dot{a}_2 + ka_2 \right] + 2v\mu_F \left(\frac{4}{3} \dot{a}_1 - \frac{4}{5} 3\dot{a}_3 \right) = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \left[81EJ \frac{\pi^4}{14} a_3 - 9(P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} a_3 + \mu \ddot{a}_3 + \rho \dot{a}_3 + ka_3 \right] + 2v\mu_F \left(\frac{6}{5} 2\dot{a}_2 - \frac{6}{7} 4\dot{a}_4 \right) = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \left[256EJ \frac{\pi^4}{14} a_4 - 16(P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} a_4 + \mu \ddot{a}_4 + \rho \dot{a}_4 + ka_4 \right] + 2v\mu_F \left(\frac{8}{15} \dot{a}_1 - \frac{8}{7} 3\dot{a}_3 \right) = 0$$

↔

$$\mu \ddot{a}_1 + \rho \dot{a}_1 + \left(EJ \frac{\pi^4}{14} - (P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} + k \right) a_1 - \frac{4}{1} v\mu_F \left(\frac{4}{3} \dot{a}_2 + \frac{8}{15} \dot{a}_4 \right) = 0 ,$$

$$\mu \ddot{a}_2 + \rho \dot{a}_2 + \left(16EJ \frac{\pi^4}{14} - 4(P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} + k \right) a_2 - \frac{4}{1} v\mu_F \left(\frac{4}{3} \dot{a}_1 + \frac{12}{5} \dot{a}_3 \right) = 0 ,$$

$$\mu \ddot{a}_3 + \rho \dot{a}_3 + \left(81EJ \frac{\pi^4}{14} - 9(P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} + k \right) a_3 - \frac{4}{1} v\mu_F \left(-\frac{12}{5} \dot{a}_2 + \frac{24}{7} \dot{a}_4 \right) = 0 ,$$

$$\mu \ddot{a}_4 + \rho \dot{a}_4 + \left(256EJ \frac{\pi^4}{14} - 16(P+\epsilon f) \frac{\pi^2}{12} + k \right) a_4 - \frac{4}{1} v\mu_F \left(-\frac{8}{15} \dot{a}_1 - \frac{24}{7} \dot{a}_3 \right) = 0 .$$

Wir haben also für die Bestimmung der Funktionen $a_i(t)$ ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung erhalten. Interessanterweise rühren die Verkopplungen in diesem System gerade von dem Term mit den gemischten Ableitungen \dot{y}' der beschreibenden Differentialgleichung des Rohres her.

Die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems sind bis auf $f = f(t)$ konstant. Spalten wir diesen zeitabhängigen Term ab, nimmt das Differentialgleichungssystem die Form

$$\mu \ddot{a}_1 + \rho \dot{a}_1 + k_1 a_1 - \alpha_{12} a_2 - \alpha_{14} a_4 - \tilde{k}_1(t) a_1 = 0 ,$$

$$\mu \ddot{a}_2 + \rho \dot{a}_2 + k_2 a_2 + \alpha_{12} a_1 - \alpha_{23} a_3 - \tilde{k}_2(t) a_2 = 0 ,$$

$$\mu \ddot{a}_3 + \rho \dot{a}_3 + k_3 a_3 + \alpha_{23} a_2 - \alpha_{34} a_4 - \tilde{k}_3(t) a_3 = 0 ,$$

$$\mu \ddot{a}_4 + \rho \dot{a}_4 + k_4 a_4 + \alpha_{14} a_1 + \alpha_{34} a_3 - \tilde{k}_4(t) a_4 = 0$$

(2.58)

an, wobei

$$k_1 := EJ \frac{\pi^4}{l^4} - P \frac{\pi^2}{l^2} + k , \quad \tilde{k}_1(t) := f(t) \frac{\pi^2}{l^2} , \quad \alpha_{12} := \frac{16}{3} \sqrt{\mu_F} ,$$

$$k_2 := 16EJ \frac{\pi^4}{l^4} - 4P \frac{\pi^2}{l^2} + k , \quad \tilde{k}_2(t) := 4 f(t) \frac{\pi^2}{l^2} = 4 \tilde{k}_1(t) , \quad \alpha_{14} := \frac{32}{15} \sqrt{\mu_F} ,$$

$$k_3 := 81EJ \frac{\pi^4}{l^4} - 9P \frac{\pi^2}{l^2} + k , \quad \tilde{k}_3(t) := 9 f(t) \frac{\pi^2}{l^2} = 9 \tilde{k}_1(t) , \quad \alpha_{23} := \frac{48}{5} \sqrt{\mu_F} ,$$

$$k_4 := 256EJ \frac{\pi^4}{l^4} - 16P \frac{\pi^2}{l^2} + k , \quad \tilde{k}_4(t) := 16 f(t) \frac{\pi^2}{l^2} = 16 \tilde{k}_1(t) , \quad \alpha_{34} := \frac{96}{7} \sqrt{\mu_F} .$$

Das Differentialgleichungssystem wird nun auf die gewohnte Form eines Systems 1. Ordnung gebracht. Zu diesem Zweck werden die neuen Größen

$$x_1 := a_1 \quad , \quad x_5 := \dot{a}_1 \quad ,$$

$$x_2 := a_2 \quad , \quad x_6 := \dot{a}_2 \quad ,$$

$$x_3 := a_3 \quad , \quad x_7 := \dot{a}_3 \quad ,$$

$$x_4 := a_4 \quad , \quad x_8 := \dot{a}_4$$

eingeführt. Dann lauten die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_5 = -\frac{\rho}{\mu} x_5 - \frac{k_1}{\mu} x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\mu} x_6 + \frac{\alpha_{14}}{\mu} x_8 + \frac{\tilde{k}_1(t)}{\mu} x_1 \quad ,$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{\rho}{\mu} x_6 - \frac{k_2}{\mu} x_2 - \frac{\alpha_{12}}{\mu} x_5 + \frac{\alpha_{23}}{\mu} x_7 + \frac{\tilde{k}_2(t)}{\mu} x_2 \quad ,$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{\rho}{\mu} x_7 - \frac{k_3}{\mu} x_3 - \frac{\alpha_{23}}{\mu} x_6 + \frac{\alpha_{34}}{\mu} x_8 + \frac{\tilde{k}_3(t)}{\mu} x_3 \quad ,$$

$$\dot{x}_8 = -\frac{\rho}{\mu} x_8 - \frac{k_4}{\mu} x_4 - \frac{\alpha_{14}}{\mu} x_5 - \frac{\alpha_{34}}{\mu} x_7 + \frac{\tilde{k}_4(t)}{\mu} x_4$$

sowie

$$\dot{x}_1 = x_5 \quad ,$$

$$\dot{x}_2 = x_6 \quad ,$$

$$\dot{x}_3 = x_7 \quad ,$$

$$\dot{x}_4 = x_8 \quad .$$

In der obigen Form können wir die Differentialgleichungen auch gut als Matrixdifferentialgleichung schreiben:

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \tilde{\underline{A}}(t)) \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \tilde{\underline{A}}(t) \underline{x} \quad \leftrightarrow$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad ,$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} \quad , \quad (2.59)$$

$$\underline{u} = -\underline{K}(t) \underline{y} \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{A}}(t) = -\underline{B} \underline{K}(t) \underline{C} \quad .$$

Die Matrizen und Vektoren haben dabei folgendes Aussehen:

$$\underline{A} := \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \mu \\ -k_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -\rho & \alpha_{12} & \cdot & \alpha_{14} \\ \cdot & -k_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{12} & -\rho & \alpha_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k_3 & \cdot & \cdot & -\alpha_{23} & -\rho & \alpha_{34} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -k_4 & -\alpha_{14} & \cdot & -\alpha_{34} & -\rho \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{B} := \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\underline{C} := \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\underline{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{bmatrix}^T \quad ,$$

Diese Frage können wir näherungsweise dann beantworten, wenn wir den Mehrfachregelkreis (2.59) auf Stabilität untersuchen. Ist dies dieser nämlich stabil, klingen die Funktionen $a_i(t)$ mit der Zeit ab und damit auch die Auslenkung des Rohres

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^4 a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} .$$

Als Unsicherheit bleibt freilich bestehen, daß u lediglich Näherung für die strenge Lösung der partiellen Differentialgleichung ist. Es wäre denkbar, daß in der Ortsrichtung kürzere Wellen auftreten als die, welche in dem Ansatz erfaßt werden und jene gerade ein instabiles Verhalten besitzen. Werden jedoch in dem Ansatz genügend viele Glieder berücksichtigt, wird man davon ausgehen können, daß ein derartiges Problem nicht auftritt.

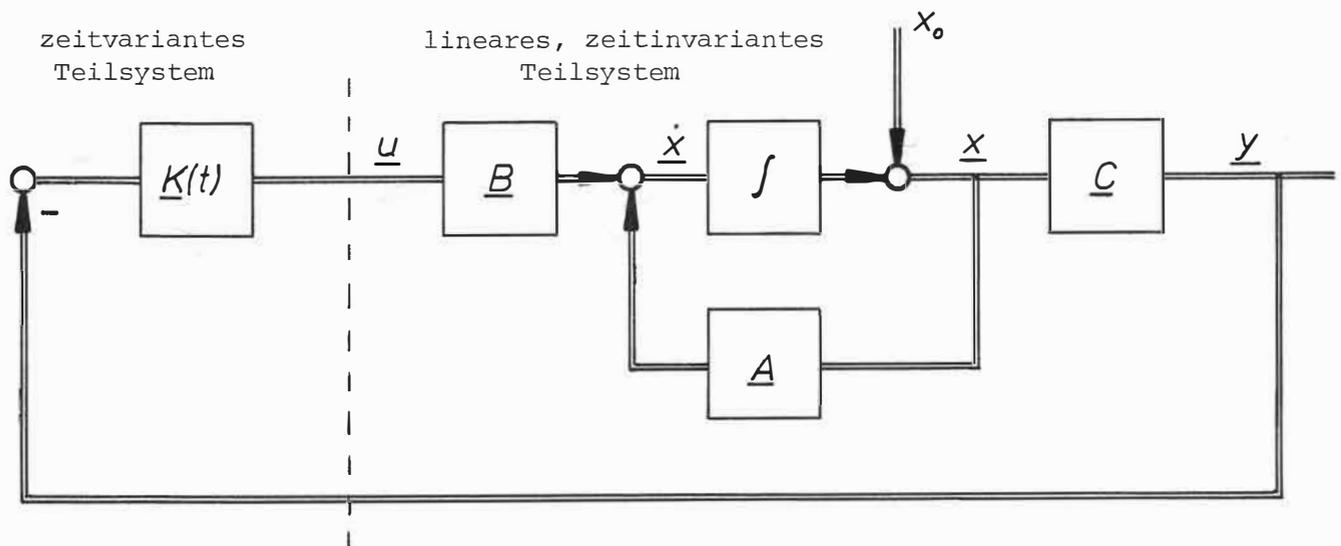


Bild 7: Blockstruktur des Differentialgleichungssystems (2.59).

Die Frage nach der Stabilität ließe sich unter Heranziehung des Kreiskriteriums bearbeiten. Das Bild 7 macht deutlich, daß die für das Kriterium notwendige Aufspaltung in ein lineares, zeitinvariantes und in ein nichtlineares bzw. zeitvariantes Teilsystem möglich ist. Bild 8 zeigt das vollständige Struktur-

bild, in dem bereits eine Abschätzung des zeitvarianten Teilsystems angedeutet ist. Auch sind dort die Anfangszustände der Übersichtlichkeit halber fortgelassen.

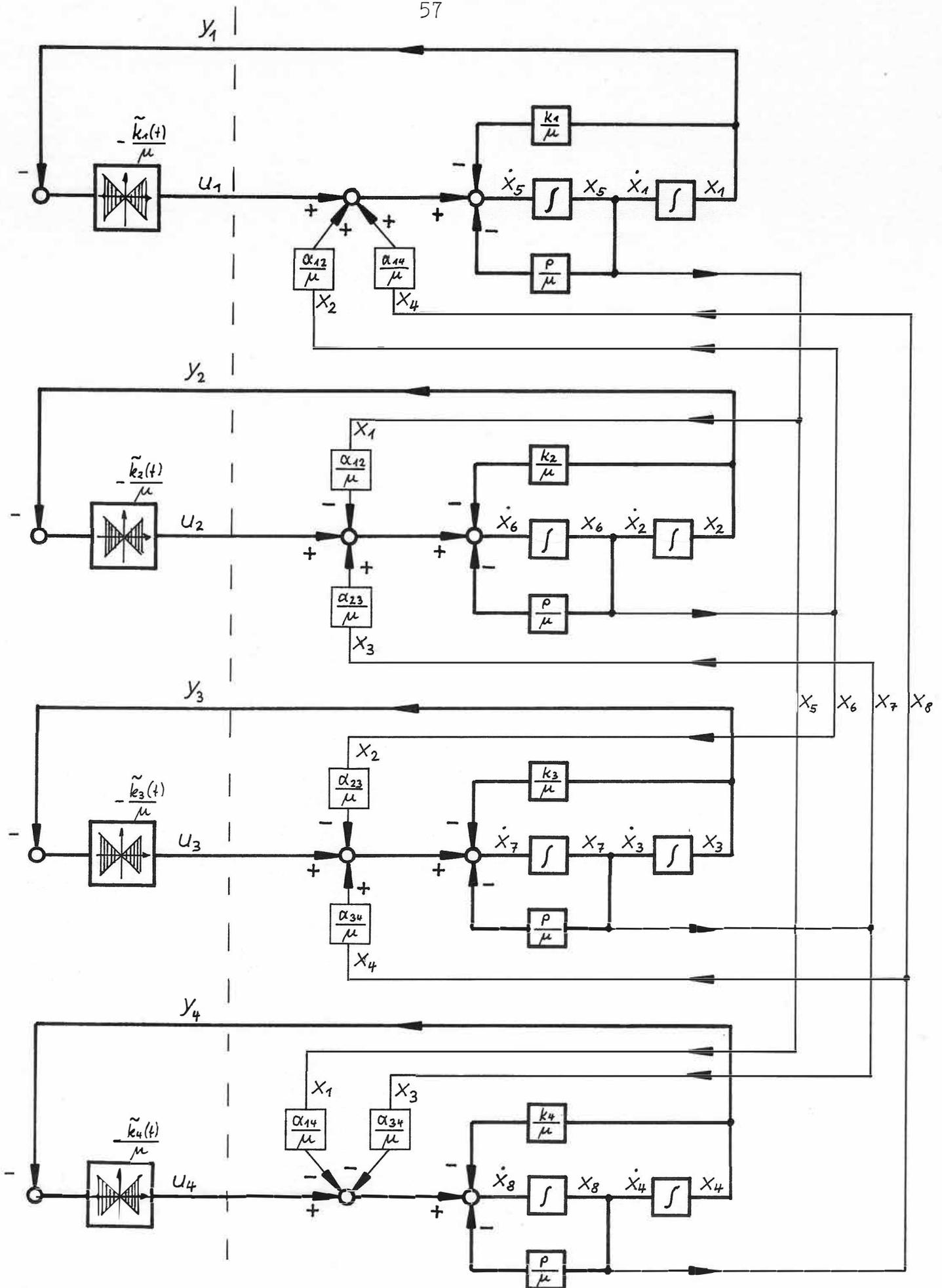


Bild 8: Struktur des Systems (2.59).

3. DIE STABILITÄT VON MEHRGRÖSSENSYSTEMEN

3.1 VORBEMERKUNGEN

Dem Kernpunkt dieses Kapitels, dem Kreiskriterium für nicht-lineare Mehrgrößensysteme (Abschnitt 3.2), werden noch einige Sätze vorangestellt, auf die später zurückgegriffen werden soll.

3.1.1 Das Gerschgorin-Theorem

Satz 3.1a: Die Eigenwerte einer komplexen Matrix $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ liegen innerhalb oder auf dem Rand des Gebietes G der komplexen Ebene, gebildet aus n Kreisen K_i mit den Mittelpunkten a_{ii} und den Radien

$$d_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|, \quad i = 1 \dots n, \quad (3.1a)$$

also gleich den Zeilensummen der Beträge der Nichtdiagonalelemente. Das gleiche gilt für das Gebiet G' , gebildet aus n Kreisen K'_i mit den gleichen Mittelpunkten a_{ii} und den Radien

$$d'_i = \sum_{k \neq i} |a_{ki}|, \quad i = 1 \dots n, \quad (3.1b)$$

also gleich den Spaltensummen der Beträge der Nichtdiagonalelemente. Die Eigenwerte können durch den Durchschnitt der Gebiete G und G' ,

$$G \cap G' = \left(\bigcup_i K_i \right) \cap \left(\bigcup_i K'_i \right), \quad (3.2)$$

weiter eingegrenzt werden.

Satz 3.1b: Durchsetzen sich m der Kreise und bilden ein zusammenhängendes Gebiet H , das alle übrigen Kreise außerhalb läßt, so liegen genau m der Eigenwerte in H .

(s. [10])

Beweis 3.1a: Sei \underline{x} ein beliebiger Eigenvektor des Matrix \underline{A} und λ der zugehörige Eigenwert,

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad (3.3)$$

x_j sei nun die Komponente des Vektors \underline{x} , für die gilt:

$$|x_j| = \max_i |x_i| \quad (3.4)$$

Schreiben wir nun die j -te Zeile der Matrixgleichung (3.3) an:

$$\begin{aligned} \sum_k a_{jk} x_k &= \lambda x_j && \leftrightarrow \\ a_{jj} x_j + \sum_{k \neq j} a_{jk} x_k &= \lambda x_j && \leftrightarrow \\ (\lambda - a_{jj}) x_j &= \sum_{k \neq j} a_{jk} x_k && \leftrightarrow \\ (\lambda - a_{jj}) &= \sum_{k \neq j} a_{jk} \frac{x_k}{x_j} && \rightarrow \\ |\lambda - a_{jj}| &\leq \sum_{k \neq j} |a_{jk}| = d_j \end{aligned}$$

wegen (3.4) und mit d_j nach (3.1a). Der Eigenwert λ liegt also in dem Kreis um a_{jj} mit dem Radius d_j wie es der Satz 3.1a aussagt. Desgleichen führen wir den Beweis für die Kreise K_i' durch, indem wir in (3.3) die Matrix \underline{A} durch die transponierte Matrix \underline{A}' ersetzen. Diese hat dieselben Eigenwerte wie \underline{A} .

Beweis 3.1b: Bestehe das Gebiet H aus den m Kreisen K_{j_1} bis K_{j_m} . Definieren wir jetzt eine Matrix $\underline{B}(t)$, mit der $\underline{B}(0) = \text{diag}(a_{i_i})$ und $\underline{B}(1) = \underline{A}$ gilt. Die Nichtdiagonalelemente von $\underline{B}(t)$ sollen stetige, monotone Funktionen von t sein. Die Diagonalelemente sind konstant. Dann haben die Gerschgorinkreise $K_i(t)$ der Matrix $\underline{B}(t)$ konstante Mittelpunkte und mit t stetig und monoton wachsende Radien. Die Eigenwerte von $\underline{B}(0)$ sind die a_{i_i} ; die Kreise $K_i(0)$ sind punktförmig zusammengezogen. Nach Voraussetzung müssen nun auch die Kreise $K_{j_1}(t)$ bis $K_{j_m}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, stets alle anderen Kreise außerhalb lassen. Daher enthalten die „Kreise“ $K_{j_1}(0)$ bis $K_{j_m}(0)$ genau m Eigenwerte. Die Eigenwerte einer Matrix sind aber stetige Funktionen ihrer Elemente; daher müssen für $t = 1$ immer noch m Eigenwerte in den Kreisen $K_{j_1}(1) = K_{j_1}$ bis $K_{j_m}(1) = K_{j_m}$ liegen. (vgl. [10]) 3.57f)

Beispiel: Eine exakte Berechnung der Eigenwerte der Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ergibt $\lambda_1 = -3,177$,
 $\lambda_2 = 3,588 + 1,386 i$,
 $\lambda_3 = 3,588 - 1,386 i$.

Zeichnen wir nun die „Gerschgorinkreise“ entsprechend den Zeilen- und Spaltensummen:

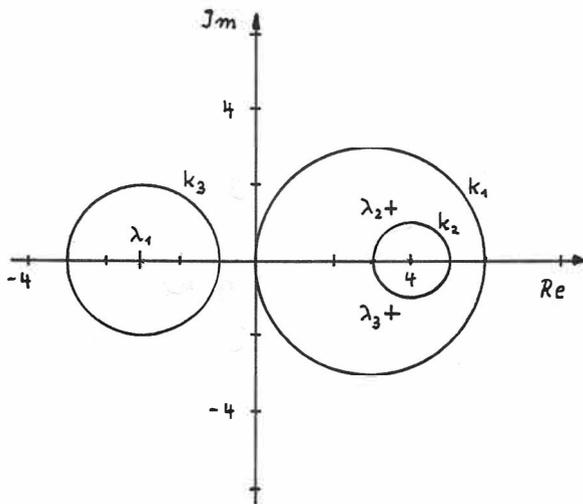


Bild 9a: Die Kreise K_i .

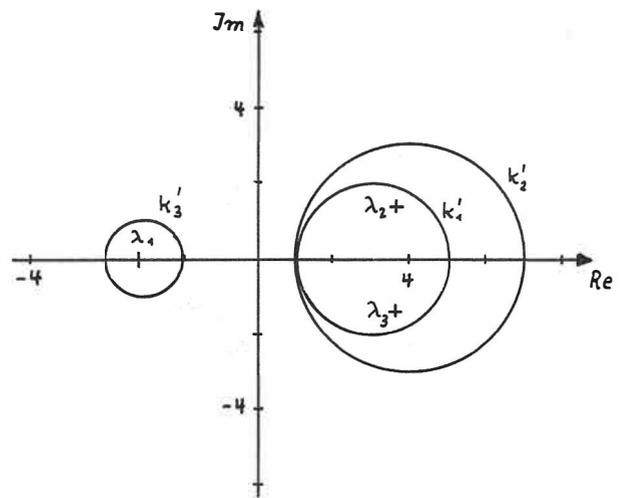


Bild 9b: Die Kreise K'_i .

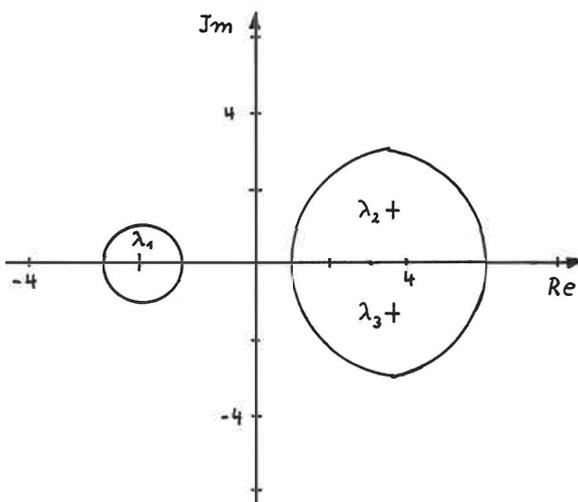


Bild 9c: Das Gebiet $G \cap G'$.

Bemerkung: Die relative Genauigkeit der Abschätzung der Eigenwerte durch das Gerschgorin-Theorem entspricht dem Verhältnis von d_i bzw. d_i' zum Betrag der Diagonalelemente $|a_{ii}|$. Für Matrizen $|a_{ii}| \gg d_i$ bzw. d_i' liefert der Satz also Abschätzungen großer relativer Genauigkeit. In diesen Matrizen überwiegen dann betragsmäßig stark die Diagonalelemente. Für Diagonalmatrizen liefert das Gerschgorin-Theorem dann sogar die genauen Eigenwerte $\lambda_i = a_{ii}$.

3.1.2 Diagonaldominante Matrizen

Eine Matrix $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt zeilendiagonaldominant, wenn sie die Bedingung

$$|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|, \quad i = 1 \dots n \quad (3.5a)$$

erfüllt. Sie heißt spaltendiagonaldominant, wenn sie die Bedingung

$$|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ki}|, \quad i = 1 \dots n \quad (3.5b)$$

erfüllt. In beiden Fällen spricht man auch kurz von „diagonaldominant“.

Satz 3.2: Eine diagonaldominante Matrix \underline{A} ist stets regulär oder invertierbar.

Beweis: Die Gerschgorinkreise schließen unter der Bedingung des Diagonaldominanz (3.5a) oder (3.5b) den Ursprung aus. Daher kann wegen des Satzes 3.1a der Wert 0 kein Eigenwert sein. Deshalb ist die Matrix invertierbar und damit regulär.

3.1.3 Das Nyquist - Kriterium

Es liegt ein lineares, zeitinvariantes Mehrgrößensystem der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \quad , \quad (3.6a)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x} \quad (3.6b)$$

mit der Rückkopplung

$$\underline{u}(t) = \underline{r}(t) - \underline{y}(t) \quad (3.7)$$

vor. Es ist $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{r}(t), \underline{u}(t), \underline{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wir setzen voraus, daß (3.6a), (3.6b) eine Minimalrealisierung darstellt, also vollständig steuerbar und beobachtbar ist (Begriffe s. z.B. [8]).

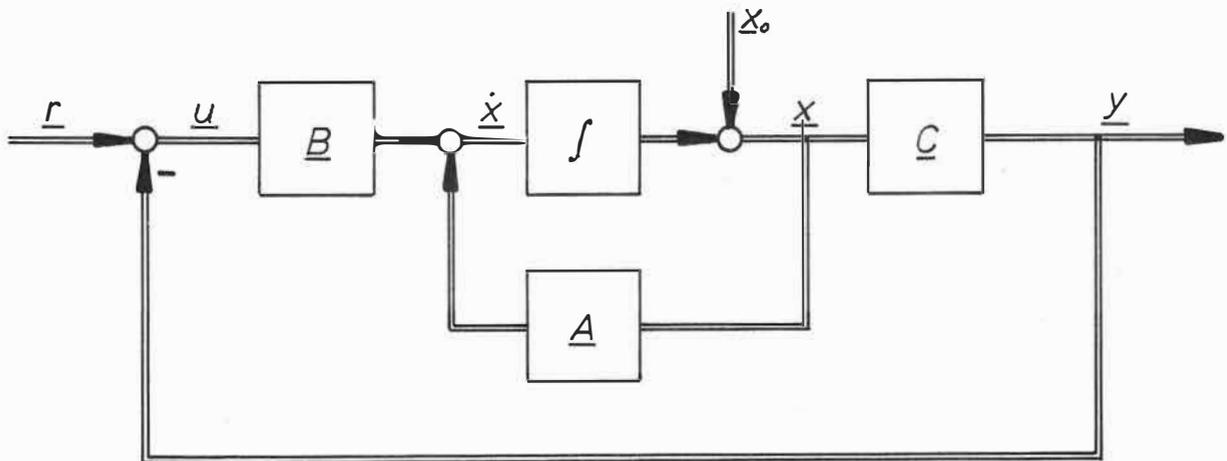


Bild 10: Struktur des Systems (3.6a), (3.6b), (3.7).

Setzen wir (3.7) und (3.6b) in (3.6a) ein, folgt

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} (\underline{r}(t) - \underline{C} \underline{x}(t)) \quad ,$$

so daß wir zusammenfassend schreiben können:

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{B}\underline{C}) \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{r}(t) \quad , \quad (3.8a)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) \quad . \quad (3.8b)$$

Das System (3.6a), (3.6b), (3.7) läßt sich auch durch die Laplace-Transformierten beschreiben. \underline{R} , \underline{U} , $\underline{Y} \in \mathbb{C}^m$ bezeichnen die Laplace-Transformierten von r , u , y . Zum Thema der Laplace-Transformation s. z.B. [7] oder kurz [8] S.374 ff.

$$\underline{Y}(s) = \underline{L}(s) \underline{U}(s) \quad , \quad (3.9)$$

$$\underline{U}(s) = \underline{R}(s) - \underline{Y}(s) \quad . \quad (3.10)$$

$\underline{L}(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ist die Übertragungsmatrix des offenen Kreises,

$$\underline{L}(s) = \underline{C} (\underline{E}s - \underline{A})^{-1} \underline{B} = \frac{1}{\Delta_o(s)} \underline{Z}_o(s) \quad , \quad (3.11)$$

mit dem charakterischen Polynom der Matrix \underline{A}

$$\Delta_o(s) = \det(\underline{E}s - \underline{A}) \quad (3.12)$$

und der Polynommatrix

$$\underline{Z}_o(s) = \underline{C} \operatorname{adj}(\underline{E}s - \underline{A}) \underline{B} \quad . \quad (3.13)$$

Analog zu der Beschreibung im Zeitbereich durch (3.8a), (3.8b) können wir auch (3.9), (3.10) zusammenfassen:

$$\underline{Y}(s) = \underline{L}(s) (\underline{R}(s) - \underline{Y}(s)) \quad \leftrightarrow$$

$$(\underline{E} + \underline{L}(s)) \underline{Y}(s) = \underline{L}(s) \underline{R}(s) \quad \leftrightarrow$$

$$\underline{Y}(s) = (\underline{E} + \underline{L}(s))^{-1} \underline{L}(s) \underline{R}(s) \quad \leftrightarrow$$

$$\underline{Y}(s) = \underline{T}(s) \underline{R}(s) \quad (3.14)$$

mit der Übertragungsmatrix des geschlossenen Kreises

$$\underline{T}(s) = (\underline{E} + \underline{L}(s))^{-1} \underline{L}(s) \quad (3.15)$$

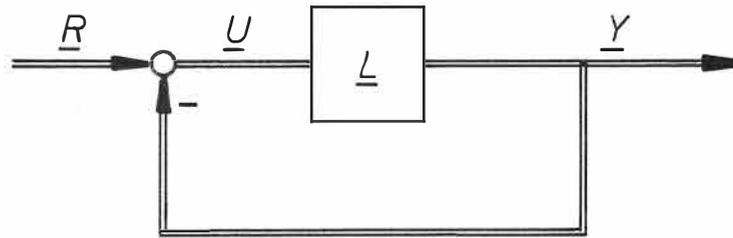


Bild 11: Struktur des Systems (3.9), (3.10).

Andererseits erhalten wir $\underline{T}(s)$ auch aus (3.8a), (3.8b):

$$\underline{T}(s) = \underline{C} (\underline{E}s - \underline{A} + \underline{BC})^{-1} \underline{B} = \frac{1}{\Delta(s)} \underline{Z}(s) \quad (3.16)$$

mit dem charakteristischen Polynom der Matrix $\underline{A} - \underline{BC}$ des geschlossenen Kreises

$$\Delta(s) = \det (\underline{E}s - \underline{A} + \underline{BC}) \quad (3.17)$$

und der Polynommatrix

$$\underline{Z}(s) = \underline{C} \operatorname{adj}(\underline{E}s - \underline{A} + \underline{BC}) \underline{B} \quad (3.18)$$

Der geschlossene Kreis ist nun genau dann asymptotisch stabil, wenn die Systemmatrix $\underline{A} - \underline{BC}$ des geschlossenen Kreises nur Eigenwerte in der linken offenen Halbebene besitzt. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta(s) = 0 \quad , \quad (3.19)$$

welche dann in der linken offenen Halbebene liegen müssen.

Zur Beantwortung der Frage, wann die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ des geschlossenen Kreises in der linken offenen Halbebene liegen, soll ein Zusammenhang mit dem charakteristischen Polynom des offenen Kreises hergestellt werden. Dazu benötigen wir noch den folgenden Hilfssatz:

Satz 3.3: Für die Determinante der Matrix $\underline{E} + \underline{P}\underline{Q}$, mit zwei beliebigen Matrizen $\underline{P} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $\underline{Q} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ gilt

$$\det(\underline{E} + \underline{P}\underline{Q}) = \det(\underline{E} + \underline{Q}\underline{P}) \quad , \quad (3.20)$$

wobei \underline{E} die jeweils passende Einheitsmatrix ist.

Beweis: Mit zwei quadratischen Matrizen \underline{F} und \underline{G} gilt

$$\det(\underline{F}\underline{G}) = \det(\underline{F})\det(\underline{G}) = \det(\underline{G}\underline{F}) \quad . \quad (3.21)$$

Dies nutzen wir mit zwei Übermatrizen aus und erhalten durch Umformungen (3.20):

$$\det\left(\begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{P} \\ \underline{O} & \underline{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E} & -\underline{P} \\ \underline{Q} & \underline{E} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \underline{E} & -\underline{P} \\ \underline{Q} & \underline{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{P} \\ \underline{O} & \underline{E} \end{bmatrix}\right)$$

$$\det\begin{bmatrix} \underline{E} + \underline{P}\underline{Q} & \underline{O} \\ \underline{Q} & \underline{E} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{O} \\ \underline{Q} & \underline{Q}\underline{P} + \underline{E} \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{E} + \underline{P}\underline{Q}) = \det(\underline{Q}\underline{P} + \underline{E}) \quad .$$

Stellen wir nun den Zusammenhang zwischen $\Delta(s)$ und $\Delta_0(s)$ her. Wir schreiben (3.17) an und formen um:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= \det (\underline{E}s - \underline{A} + \underline{B}\underline{C}) = \det \left((\underline{E}s - \underline{A})(\underline{E} + (\underline{E}s - \underline{A})^{-1}\underline{B}\underline{C}) \right) \\ &= \det (\underline{E}s - \underline{A}) \det (\underline{E} + (\underline{E}s - \underline{A})^{-1}\underline{B}\underline{C}) .\end{aligned}$$

Wenden wir (3.20) mit $\underline{P} = (\underline{E}s - \underline{A})^{-1}\underline{B}$ und $\underline{Q} = \underline{C}$ an:

$$\Delta(s) = \det (\underline{E}s - \underline{A}) \det (\underline{E} + \underline{C} (\underline{E}s - \underline{A})^{-1} \underline{B}) .$$

Mit (3.12) und (3.11) folgt

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) \det (\underline{E} + \underline{L}(s)) \quad \leftrightarrow$$

$$\det (\underline{E} + \underline{L}(s)) = \frac{\Delta(s)}{\Delta_0(s)} . \quad (3.22)$$

Die Determinante von $\underline{E} + \underline{L}(s)$ ist also gerade das Verhältnis der charakteristischen Polynome des offenen und des geschlossenen Kreises. Wie man aus (3.12) und (3.17) erkennt, haben die Polynome $\Delta_0(s)$ und $\Delta(s)$ beide den Grad n . Wir haben also den gleichen Quotienten $\frac{\Delta}{\Delta_0}$ wie im Fall des Eingrößensystems, wo statt $\det(\underline{E} + \underline{L}(s))$ der einfachere Term $1 + L(s)$ auftritt. Wir wenden wie dort das Nyquistkriterium an (s. z.B. [8], S. 113 ff, insbesondere (4.34) bis (4.37)).

Das Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme lautet dann:

Satz 3.4: Der geschlossene Regelkreis (3.6a), (3.6b), (3.7) oder (3.8a), (3.8b) ist genau dann asymptotisch stabil, das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ des geschlossenen Kreises (3.17) besitzt also nur Nullstellen in der linken offenen Halbebene, wenn die Bedingung

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (\det(\underline{E} + \underline{L}(i\omega))) = r_0\pi + a_0\frac{\pi}{2} \quad (3.23)$$

erfüllt ist. Hierbei ist r_0 bzw. a_0 die Anzahl der Nullstellen in der rechten offenen Halbebene bzw. auf der imaginären Achse des charakteristischen Polynoms Δ_0 des offenen Kreises. Unter der Bezeichnung $\Delta \arg f(\omega)$ versteht man die stetige Winkeländerung der komplexen Funktion $f(\omega)$, wenn ω das angegebene Intervall durchläuft:

$$\Delta_{\omega=a}^b \arg f(\omega) := \int_{\omega=a}^b d(\arg f(\omega)) \quad (3.24)$$

Bemerkung: Es ist bei der Anwendung von (3.23) der scheinbar selbstverständliche Umstand zu beachten, daß die Anzahlen der Nullstellen r_0 und a_0 von Δ_0 bekannt sein müssen. Ist die Zustandsdarstellung des Systems oder das Polynom Δ_0 direkt gegeben, bereitet dies keine Schwierigkeiten. Wird das System aber nur durch die Übertragungsmatrix $\underline{L}(s) = (l_{ik}(s))$ beschrieben, ist die Angabe der Nullstellen von Δ_0 und damit von a_0 und r_0 keineswegs sofort möglich. Das Polynom Δ_0 ist nämlich nicht in jedem Fall gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nennerpolynome der Elemente $l_{ik}(s)$.

So ist in dem einfachen Beispiel

$$\underline{L}(s) = \frac{1}{s-a} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

nicht etwa $\Delta_0(s) = D(s)$. Es gibt nämlich kein Zustandsmodell $\underline{A} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, das die obige Übertragungsmatrix (3.25) liefert. Vielmehr ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

eine Minimalrealisierung von (3.25) und damit $\Delta_0(s) = (s-a)^2$. Ist a positiv, liegen in der rechten offenen Halbebene zwei Nullstellen von Δ_0 , also $r_0 = 2$, welches aus (3.25) nicht unmittelbar ersichtlich ist.

Die Anwendung des Nyquist-Kriteriums in der Form des Satzes 3.4 bereitet bei Mehrgrößensystemen Schwierigkeiten, da im Gegensatz zum Fall des Eingrößensystems zuerst eine Determinante berechnet werden muß. Außerdem geht leider die direkte Anschaulichkeit verloren. Deshalb werden jetzt die Bedingungen des Satzes 3.4 verschärft, so daß wir wieder zu unmittelbarer Anschaulichkeit gelangen:

Satz 3.5: Der geschlossene Regelkreis (3.6a), (3.6b), (3.7) oder (3.8a), (3.8b) ist dann asymptotisch stabil, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

Der offene Regelkreis (3.6a), (3.6b) ist asymptotisch stabil, d.h. Δ_0 besitzt nur Nullstellen in der linken offenen Halbebene.

Die Matrix $\underline{E} + \underline{L}(i\omega)$ ist für alle ω diagonaldominant.

Für die Winkeländerung von $1 + l_{kk}(i\omega)$ gilt

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (1 + l_{kk}(i\omega)) = 0, \quad k = 1 \dots n \quad (3.27)$$

Beweis: Da der offene Kreis stabil ist, sind r_0 und a_0 Null. Daher muß nach Satz 3.4

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (\det(\underline{E} + \underline{L}(i\omega))) = 0$$

für die Stabilität des geschlossenen Kreises erfüllt werden.

Die Determinante einer Matrix ist nun das Produkt ihrer Eigenwerte, also

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (\det(\underline{E} + \underline{L}(i\omega))) &= \Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k [\underline{E} + \underline{L}(i\omega)] \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg \lambda_k [\underline{E} + \underline{L}(i\omega)] = \sum_{k=1}^n \Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (1 + \lambda_k [\underline{L}(i\omega)]) \end{aligned}$$

Es sei dabei $\lambda_k [\underline{A}]$ der k-te Eigenwert von \underline{A} .

Da die Diagonaldominanz von $\underline{E} + \underline{L}(i\omega)$ vorausgesetzt ist, meiden die Gerschgorinkreise von $\underline{E} + \underline{L}(i\omega)$ den Ursprung oder die Gerschgorinkreise von $\underline{L}(i\omega)$ den Punkt -1 . Da nach dem Gerschgorin-Theorem, Satz 3.1a, die Eigenwerte in der Vereinigung der Kreise liegen, ist wegen der Diagonaldominanz die Winkeländerung der Eigenwerte eindeutig durch die Winkeländerung der Diagonalelemente bestimmt:

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (\det(\underline{E} + \underline{L}(i\omega))) = \sum_{k=1}^n \Delta_{\omega=0}^{\infty} \arg (1 + l_{kk}(i\omega)) \quad (3.28)$$

Aufgrund der Voraussetzung ist die Winkeländerung dem Satz 3.4 entsprechend Null; das System ist unter den angegebenen Voraussetzungen asymptotisch stabil.

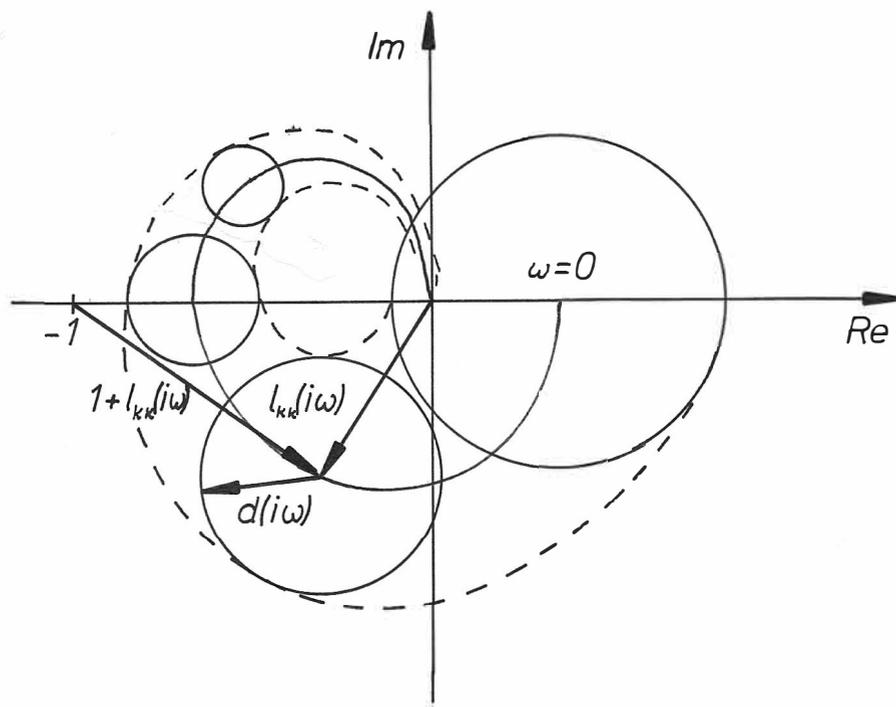


Bild 12.

Zeichnet man wie in Bild 12 nicht nur die Diagonalelemente $l_{kk}(i\omega)$, sondern auch gleich die Kreise mit den Mittelpunkten $l_{kk}(i\omega)$ und den Radien $d(i\omega)$ oder $d'(i\omega)$ entsprechend (3.1a) oder (3.1b), kann man auch gleich die Diagonaldominanz von $\underline{E} + \underline{L}(i\omega)$ in der Zeichnung prüfen. Ist die Diagonaldominanz

schon anderweitig gesichert, genügt natürlich das Zeichnen von $l_{kk}(i\omega)$ allein. Ergäbe sich für alle k ein ähnliches Aussehen wie in Bild 12, wäre der geschlossene Kreis unter der Voraussetzung der Stabilität des offenen Kreises selbst stabil.

Bemerkung: Die Einschränkung des Satzes 3.5, nach der auch der offene Kreis stabil sein muß, ließe sich noch abschwächen. Es müßte sich dann eine Winkeländerung entsprechend (3.23) ergeben. Leider gilt für diesen Fall die Gleichung (3.29) nicht mehr, da nach Satz 3.1 nicht etwa in jedem Kreis genau ein Eigenwert liegt. Es müßte dem Satz 3.1b entsprechend geprüft werden, welche zusammenhängenden Teilgebiete im Einzelfall vorliegen.

Zu diesem Abschnitt siehe auch [9] und [14].

3.1.4 Das inverse Nyquist - Kriterium (Rosenbrock)

Ähnlich wie Satz 3.4 läßt sich ein Stabilitätskriterium mit inversen Übertragungsmatrizen formulieren. Im folgenden bezeichnet $\hat{\underline{A}}$ der besseren Übersichtlichkeit wegen die Inverse einer Matrix \underline{A} :

$$\hat{\underline{A}} = (\hat{a}_{ik}) := \underline{A}^{-1} \quad (3.29)$$

Wir formen (3.22) um:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(s)}{\Delta_0(s)} &= \det(\underline{E} + \underline{L}(s)) = \det \underline{L}(s) (\hat{\underline{L}}(s) + \underline{E}) \\ &= \frac{\det(\hat{\underline{L}}(s) + \underline{E})}{\det \hat{\underline{L}}(s)} \quad \leftrightarrow \\ \det(\underline{E} + \hat{\underline{L}}(s)) &= \det \hat{\underline{L}}(s) \frac{\Delta(s)}{\Delta_0(s)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Soll der geschlossene Kreis asymptotisch stabil sein, muß nach (3.23)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \det(\underline{E} + \underline{L}(i\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \frac{\Delta(i\omega)}{\Delta_0(i\omega)} = (r_0 + \frac{a_0}{2})\pi$$

gelten. Mit (3.30) ergibt das den folgenden Satz:

Satz 3.6: Der geschlossene Regelkreis (3.6a), (3.6b), (3.7) oder (3.8a), (3.8b) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Bedingung

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \det(\underline{E} + \hat{\underline{L}}(i\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \det \hat{\underline{L}}(i\omega) + (r_0 + \frac{a_0}{2})\pi \quad (3.31)$$

erfüllt ist.

Ähnlich Satz 3.5 können wir auch hier die Bedingungen verschärfen, so daß wir zu einer besseren graphischen Interpretation gelangen.

Satz 3.7: Der geschlossene Regelkreis (3.6a), (3.6b), (3.7) oder (3.8a), (3.8b) ist dann asymptotisch stabil, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

Der offene Regelkreis (3.6a), (3.6b) ist asymptotisch stabil, d.h. Δ_0 hat nur Nullstellen in der linken offenen Halbebene.

Die Matrizen $\hat{\underline{L}}(i\omega)$ und $\underline{E} + \hat{\underline{L}}(i\omega)$ sind für alle ω diagonaldominant.

Es gilt
$$\sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg(1 + \hat{l}_{kk}(i\omega)) = \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \hat{l}_{kk}(i\omega), \quad k=1 \dots n. \quad (3.32)$$

Beweis: Analog zu dem Beweis des Satzes 3.5 ausgehend von (3.31) und unter Ausnutzung der Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \det(\underline{E} + \hat{\underline{L}}(i\omega)) - \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \det \hat{\underline{L}}(i\omega) \\ &= \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k[\underline{E} + \hat{\underline{L}}(i\omega)] \right) - \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k[\hat{\underline{L}}(i\omega)] \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \lambda_k[\underline{E} + \hat{\underline{L}}(i\omega)] - \sum_{k=1}^n \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \lambda_k[\hat{\underline{L}}(i\omega)] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg(1 + \hat{l}_{kk}(i\omega)) - \sum_{k=1}^n \sum_{\omega=0}^{\infty} \Delta \arg \hat{l}_{kk}(i\omega) = 0 \end{aligned}$$

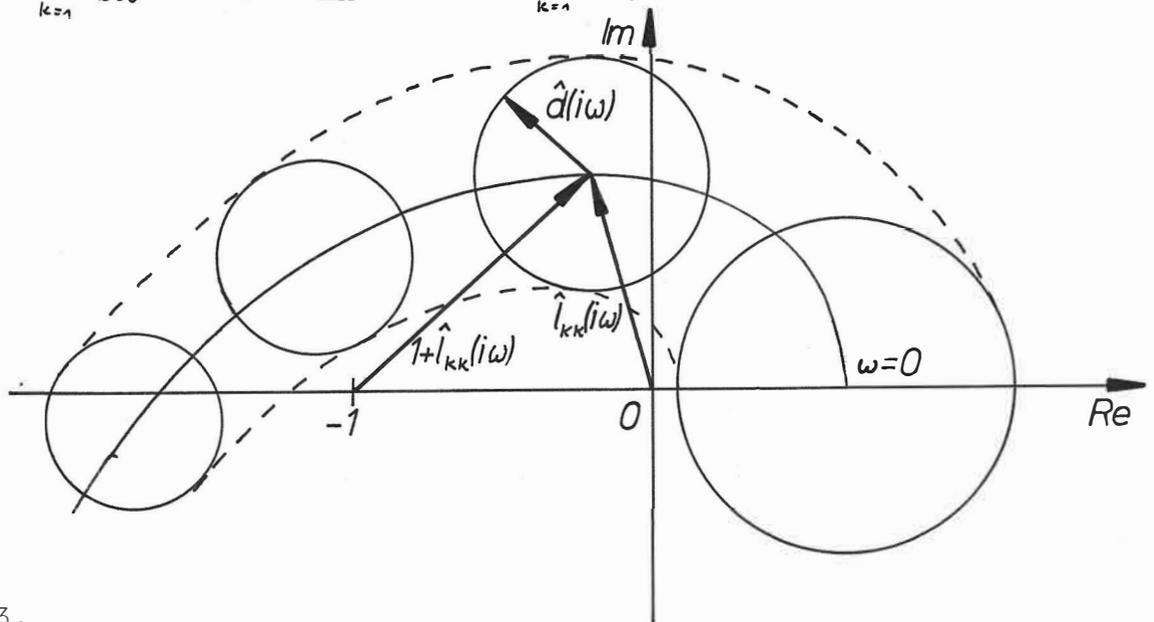


Bild 13.

Zeichnet man wie in Bild 13 zusätzlich zu $\hat{l}_{kk}(i\omega)$ auch die Kreise mit den Mittelpunkten $\hat{l}_{kk}(i\omega)$ und den Radien $\hat{d}(i\omega)$ oder $\hat{d}'(i\omega)$, so kann man gleichzeitig mit der Winkelbedingung (3.32) auch gleich die Diagonaldominanz von $\hat{L}(i\omega)$ und $\underline{E} + \hat{L}(i\omega)$ prüfen. Die Radien $\hat{d}(i\omega)$ bzw. $\hat{d}'(i\omega)$ sind die Zeilen- bzw. Spaltensummen der Beträge der Nichtdiagonalelemente von $\hat{L}(i\omega)$ und auch von $\underline{E} + \hat{L}(i\omega)$. Ist die Diagonaldominanz bereits anderweitig gesichert, genügt auch hier das Zeichnen von $\hat{l}_{kk}(i\omega)$ allein. Ergibt sich für alle k ein ähnliches Aussehen wie das in Bild 13, ist der geschlossene Regelkreis unter den Voraussetzungen des Satzes asymptotisch stabil; die Punkte 0 und -1 werden von den Gerschgorinkreisen in gleicher Weise umrundet.

Siehe auch zu diesem Abschnitt [9] und [14].

3.1.5 Der Banachsche Fixpunktsatz

In [2] S. 39 wird der Banachsche Fixpunktsatz in einer allgemeineren Form angegeben, als dies unten geschieht. Es wird später aber nur diese Form benötigt.

Sei R ein normierter Raum und T ein Operator auf R . T heißt auf R kontraktiv, wenn eine Konstante $\alpha < 1$ existiert, so daß

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\| \quad (3.33)$$

für alle $x, y \in R$.

Satz 3.8: Es sei B ein Banachraum, d.h. B ist vollständig und normiert, sowie T ein kontraktiver Operator auf B . Dann hat die Operatorgleichung

$$Tx = x \quad (3.34)$$

in B genau eine Lösung und das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (3.35)$$

konvergiert mit einem beliebigen $x_1 \in B$ gegen die Lösung von (3.34).

X und Y seien zwei normierte Räume. Ein linearer Operator T von $D(T)$ in Y heißt beschränkt, wenn es eine Konstante C (Schranke von T) gibt, so daß

$$\|Tx\| \leq C \|x\| \quad (3.36)$$

für alle $x \in D(T)$. Die kleinste Schranke von T heißt Norm des Operators T , sie wird mit $\|T\|$ bezeichnet: Damit gilt die

Ungleichung

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| . \quad (3.37)$$

Wird ein System durch einen beschränkten Operator T beschrieben,

$$y = T u , \quad (3.38)$$

so bedeutet dies in der Sprache der Regelungstechnik, daß das System bezüglich der Eingangs- und Ausgangsgröße u und y in einem bestimmten Sinne stabil ist: Die Ausgangsgröße y läßt sich durch

$$\|y\| \leq \|T\| \|u\| \quad (3.39)$$

abschätzen. Für den speziellen Fall, daß T ein beschränkter Operator auf einem normierten Raum R ist, nennen wir das durch (3.38) beschriebene System R -stabil. (vgl. [2], S.17, Def.5)

Es liegt nun ein Regelkreis folgender Struktur vor:

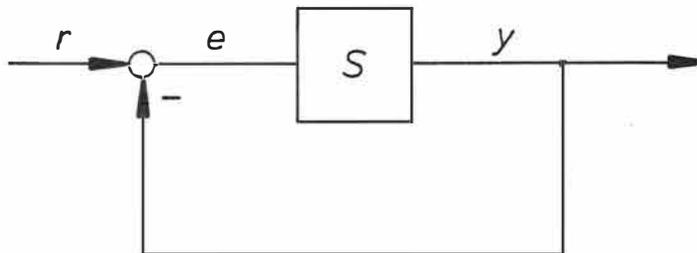


Bild 14.

Den Operator S setzen wir zunächst als linear voraus:

$$y = S e , \quad (3.40)$$

$$e = r - y \quad (3.41)$$

$$y = r - S e$$

$$e = T$$

$$\rightarrow e = r - S e \leftrightarrow$$

$$e = T e \quad (3.42)$$

$$\text{mit } T e := r - S e, \quad (3.43)$$

so daß wir eine Operatorgleichung wie (3.34) erhalten. Zur Anwendung des Satzes 3.8 benötigen wir einen Banachraum B . T ist dann Operator auf B , also $T e \in B$ für jedes $e \in B$, wenn $r \in B$ und wegen (3.43) S ein Operator auf B ist.

T ist genau dann kontraktiv, wenn S kontraktiv ist:

$$\begin{aligned} \|T x - T y\| &= \|r - S x - r + S y\| = \|S x - S y\| \\ &= \|S(x - y)\| \leq \alpha \|x - y\| \end{aligned} \quad (3.44)$$

wegen der vorausgesetzten Linearität von S . Da

$$\|S(x - y)\| \leq \|S\| \|x - y\| \quad (3.45)$$

$$\text{ist für } \|S\| \leq \alpha < 1 \quad (3.46)$$

T kontraktiv. Dann gibt es eine eindeutige Lösung e von (3.43) und wegen (3.41) auch für y , sofern $r \in B$.

Mit (3.40), (3.41) schätzen wir y ab:

$$\|y\| \leq \|S\| (\|r\| + \|y\|) \leq \alpha (\|r\| + \|y\|) \leftrightarrow$$

$$\|y\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|r\|, \quad (3.47)$$

da $\alpha < 1$. Das System nach Bild 14 ist also B -stabil.

Bemerkung: Die Bedingung (3.46) schließt ein, daß S beschränkt ist, also das offene System ohne Rückkopplung (3.40) selbst B -stabil ist.

Existiert der inverse Operator

$$\hat{S} := S^{-1} \quad (3.48)$$

auf B , so kommen wir mit

$$e = \hat{S}y, \quad (3.49)$$

$$y = r - e \quad (3.50)$$

zu $y = r - \hat{S}y$. (3.51)

Eine eindeutige Lösung y und e existiert wiederum, wenn

$$\|\hat{S}\| \leq \alpha < 1. \quad (3.52)$$

Mit (3.50), (3.49) schätzen wir wieder y ab:

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq \|r\| + \|\hat{S}\| \|y\| \leq \|r\| + \alpha \|y\| \quad \Leftrightarrow \\ \|y\| &\leq \frac{1}{1-\alpha} \|r\| \end{aligned} \quad (3.53)$$

da $\alpha < 1$.

Satz 3.9: Der Regelkreis nach Bild 14 ist dann B -stabil, wenn

$$\|S\| \leq \alpha < 1$$

oder $\|\hat{S}\| \leq \alpha < 1$

gilt.

Wie in [18] gezeigt wird, lassen sich ähnliche Forderungen auch an Potenzen und Polynome von S und \hat{S} stellen.

Besondere Bedeutung für die Regelungstechnik haben die Banachräume

$$L_p \left([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, e^{\alpha t} \right) =: L_p^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad (3.54)$$

worunter wir die Menge der auf dem Intervall $[0, \infty)$ definierten Vektorfunktionen \underline{f} verstehen wollen, wobei

$$|\underline{f}(t) e^{\alpha t}| \quad (3.55)$$

integrierbar ist.

Die Norm wird dann durch

$$\|\underline{f}\|_p^\alpha = \left(\int_0^\infty |\underline{f}(t) e^{\alpha t}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.56)$$

und im Grenzfall $p = \infty$ durch

$$\|\underline{f}\|_\infty^\alpha = \sup_0^\infty |\underline{f}(t) e^{\alpha t}| \quad (3.57)$$

definiert.

Ist ein Regelungssystem L_p^α -stabil, schreibt man auch „ L_p -stabil vom Grade α “.

Es sei darauf hingewiesen, daß der Begriff der asymptotischen Stabilität keinem der hier aufgeführten Stabilitätsbegriffen äquivalent ist. Nur die L_∞^α -Stabilität impliziert die asymptotische Stabilität der Ausgangsgröße.

Unter geeigneten Bedingungen (vollständige Beobachtbarkeit) kann man von der Stabilität des Eingangs-Ausgangs-Verhalten auch auf die Stabilität der Zustandgrößen eines Zustandsmodells

schließen. Hier soll nur die L_2^α -Stabilität untersucht werden. Die physikalische Bedeutung der Funktionen aus dem L_2^α ist die einer beschränkten Energie.

Durch den Banachschen Fixpunktsatz, Satz 3.8, ist im Prinzip bereits die Frage nach der Stabilität eines sehr allgemeinen Systemtyps beantwortet.

Der Banachsche Fixpunktsatz stellt sich zwar übersichtlich dar, die Anwendung auf Regelkreise erfordert jedoch die Berechnung oder Abschätzung einer Operatornorm, was sich als schwierig erweisen kann.

3.1.6 Abschätzungen von Matrizennormen

Der zweite Teil des folgenden Satzes ist als ein Teilstück eines Mehrgrößenkreiskriteriums von Rosenbrock in [13] (Theorem 2) angegeben:

Satz 3.10a: $\underline{Z} = (z_{ij})$ sei eine komplexe $n \times n$ Matrix, deren Elemente die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^n |z_{ij}| \leq \frac{1}{\vartheta_i}, \quad i = 1 \dots n \quad (3.58a)$$

oder

$$\sum_{i=1}^n |z_{ij}| \leq \frac{1}{\vartheta_j}, \quad j = 1 \dots n \quad (3.58b)$$

mit reellen positiven Konstanten ϑ_i erfüllen. Dann gilt für die zur Euklidischen Vektornorm passende Spektral- oder Hilbertnorm (s. [19] S. 202 ff) der Matrix die Abschätzung

$$\|\underline{Z}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta_i^2}} \quad (3.59)$$

Satz 3.10b: $\hat{\underline{Z}} = (\hat{z}_{ij})$ sei eine komplexe $n \times n$ Matrix, deren Elemente die Bedingungen

$$\frac{|\hat{z}_{ii}|}{\vartheta_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|\hat{z}_{ij}|}{\vartheta_j} \geq 1, \quad i = 1 \dots n \quad (3.60a)$$

oder

$$\frac{|\hat{z}_{jj}|}{\vartheta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|\hat{z}_{ij}|}{\vartheta_i} \geq 1, \quad j = 1 \dots n \quad (3.60b)$$

mit reellen positiven Konstanten ϑ_i erfüllen. Dann gibt es eine Inverse dieser Matrix,

$$\underline{Z} = \hat{\underline{Z}}^{-1},$$

für deren Spektralnorm die Abschätzung

$$\|\underline{Z}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta_i^2}} \quad (3.61)$$

gilt.

Beweis 3.10a: Die Euklidische Matrixnorm, die Summe der Beträge der Quadrate aller Elemente, ist obere Schranke für die Spektralnorm:

$$\|\underline{Z}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |z_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |z_{ij}| \right)^2 \quad (3.62)$$

und wegen (3.58a) folgt

$$\|\underline{Z}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta_i^2}$$

und damit (3.59). Analog zeigen wir (3.58b) \rightarrow (3.59).

Beweis 3.10b: Der Beweis wird genauso wie in [13] S.346 durchgeführt. Wegen einer Ungenauigkeit des dortigen Beweises (von (21) nach (22)) sei er hier vollständig wiedergegeben:

Die Inverse der Matrix $\hat{\underline{Z}}$ existiert wegen des Gerschgorin-Theorems, Satz 3.1: Aufgrund (3.60a) oder (3.60b) sind alle Eigenwerte von $\hat{\underline{Z}}$ dem Betrag nach größer als 1; kein Eigenwert ist Null, die Matrix ist invertierbar.

Die zur Euklidischen Vektornorm passende Matrixnorm können wir als

$$\|\underline{Z}\| = \max_{\underline{a}} \frac{|\underline{Z}\underline{a}|}{|\underline{a}|} \quad (3.63)$$

mit einem beliebigen Vektor $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ schreiben. Hierbei ist $|\underline{a}|$ die Euklidische Vektornorm.

Schreiben wir

$$\underline{\theta} = \text{diag}(\hat{\theta}_i) \quad (3.64)$$

und setzen

$$\underline{Z} \underline{a} = \underline{\theta}^{-1} \underline{b} \quad \leftrightarrow \quad \underline{a} = \underline{Z}^{-1} \underline{\theta}^{-1} \underline{b} = \underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b},$$

so wird (3.63) zu

$$\begin{aligned} \|\underline{Z}\| &= \max_{\underline{b}} \frac{|\underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{|\underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b}|} = \left(\min_{\underline{b}} \frac{|\underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{|\underline{\hat{\theta}} \underline{b}|} \right)^{-1} \\ &= \left(\min_{\underline{b}} \left[\frac{|\underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{\max_i |b_i|} \frac{\max_i |b_i|}{|\underline{\hat{\theta}} \underline{b}|} \right] \right)^{-1} \leq \left(\min_{\underline{b}} \frac{|\underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{\max_i |b_i|} \max_{\underline{b}}^{-1} \frac{|\underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{\max_i |b_i|} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Jetzt gilt mit $\max_i |b_i| = |b_k|$

$$\begin{aligned} \frac{|\underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{\max_i |b_i|} &= \frac{1}{|b_k|} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\hat{z}_{ii} \hat{\theta}_i b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \hat{z}_{ij} \hat{\theta}_j b_j|^2} \\ &\geq \frac{1}{|b_k|} \left| \hat{z}_{kk} \hat{\theta}_k b_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \hat{z}_{kj} \hat{\theta}_j b_j \right| \end{aligned}$$

Da $b_k = \max_i |b_i| = \max_i \left| \hat{z}_{kk} \hat{\theta}_k b_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \hat{z}_{kj} \hat{\theta}_j b_j \right|$ wir können unter Beachtung von (3.60a) schreiben:

Da $|b_k| = \max_i |b_i|$, ist $\left| \frac{b_j}{b_k} \right| \leq 1$ und wir können unter Beachtung von (3.60a) schreiben:

$$\frac{|\underline{\hat{Z}} \underline{\hat{\theta}} \underline{b}|}{\max_i |b_i|} \geq |\hat{z}_{kk} \hat{\theta}_k| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |\hat{z}_{kj} \hat{\theta}_j \frac{b_j}{b_k}|$$

$$\geq |\hat{z}_{kk} \hat{\vartheta}_k| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |\hat{z}_{kj} \hat{\vartheta}_j| \geq 1 \quad (3.66)$$

Weiterhin gilt

$$\max_{\underline{b}} \frac{|\hat{\underline{e}} \underline{b}|}{\max_i |b_i|} = \max_{\underline{b}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |\hat{\vartheta}_i b_i|^2}{|b_k|^2}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{\vartheta}_i^2} \quad (3.67)$$

und damit wird (3.65) mit (3.66) und (3.67) zu

$$\|\underline{Z}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{\vartheta}_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta_i^2}} \quad .$$

Analog zeigen wir (3.60b) \rightarrow (3.61), indem wir in (3.63) statt \underline{Z} die transponierte Matrix \underline{Z}' schreiben: Die Spektralnorm einer Matrix ist gleich der Spektralnorm der Transponierten.

Ein weiterer Satz zur Abschätzung von Matrizenormen wird von Cook in [5], Theorem 7 angegeben (ebenfalls im Zusammenhang mit dem Kreiskriterium). Dieser erfordert schärfere Bedingungen als der Satz 3.10b, liefert jedoch auch bessere Abschätzungen für die Normen. Der Satz stellt ähnlich wie Satz 3.10b Forderungen an eine inverse Matrix $\hat{\underline{Z}}$.

Eine Übertragung der Forderungen auf die Matrix \underline{Z} wie Satz 3.10a scheint in dieser Form jedoch nicht möglich.

Satz 3.11: $\hat{\underline{Z}} = (\hat{z}_{ij})$ sei eine komplexe $n \times n$ Matrix, deren Elemente die Bedingungen

$$|\hat{z}_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \frac{|\hat{z}_{ij}| + |\hat{z}_{ji}|}{2} \geq \frac{1}{\mu}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.68)$$

mit reellen positiven Konstanten λ_i und μ erfüllen. Dann gibt es eine Inverse dieser Matrix,

mit reellen positiven Konstanten λ_i und μ erfüllen. Dann gibt es eine Inverse dieser Matrix,

$$\underline{Z} = \underline{\hat{Z}}^{-1} ,$$

für deren Spektralnorm die Abschätzung

$$\|\underline{Z}\| \leq \mu \quad (3.69)$$

gilt.

Beweis: (Der Beweis folgt [5], Theorem 7)

Wir führen mit der unitären Matrix

$$\underline{\phi} := \text{diag} \left(\frac{\hat{z}_{ii}}{|\hat{z}_{ii}|} \right) \quad (3.70)$$

die Hermitesche Matrix

$$\underline{X} := \frac{1}{2} (\underline{\phi}^* \underline{\hat{Z}} + \underline{\hat{Z}}^* \underline{\phi}) \quad (3.71)$$

ein. Die Diagonalelemente von \underline{X} sind reell und positiv und es gilt wegen (3.68):

$$x_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_i} |x_{ij}| \geq \frac{1}{\mu} , \quad i = 1 \dots n \quad (3.72)$$

Schreiben wir

$$\underline{Y} := \text{diag}^{-1}(\lambda_i) \underline{X} \text{diag}(\lambda_i) = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} x_{ij} \right) , \quad (3.73)$$

so entnehmen wir (3.72), daß die Eigenwerte von \underline{Y} aufgrund des Gerschgorin-Theorems (Satz 3.1a) größer $\frac{1}{\mu}$ sind. Da sich die Eigenwerte durch eine Ähnlichkeitstransformation (3.73) nicht ändern, gilt das gleiche auch für \underline{X} .

Da \underline{X} eine Hermitesche Matrix ist, nimmt der Rayleigh-Quotient als Minimum den kleinsten Eigenwert an:

$$\min_{\underline{v}} \frac{\underline{v}^* \underline{X} \underline{v}}{\underline{v}^* \underline{v}} \geq \frac{1}{\mu} \quad (3.71)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{\underline{Z}} \underline{v}| |\underline{v}| &= |\hat{\underline{Z}} \underline{v}| |\underline{\phi} \underline{v}| \geq |\underline{v}^* \underline{\phi}^* \hat{\underline{Z}} \underline{v}| \\ &\geq \operatorname{Re} (\underline{v}^* \underline{\phi}^* \hat{\underline{Z}} \underline{v}) = \underline{v}^* \underline{X} \underline{v} \end{aligned} \quad (3.72)$$

woraus mit (3.71)

$$\min_{\underline{v}} \frac{|\hat{\underline{Z}} \underline{v}|}{|\underline{v}|} \geq \frac{1}{\mu} \quad (3.73)$$

folgt. Wegen (3.73) ist $\hat{\underline{Z}}$ invertierbar. Da weiter mit $\underline{w} = \hat{\underline{Z}} \underline{v}$

$$\|\underline{Z}\| = \max_{\underline{w}} \frac{|\underline{Z} \underline{w}|}{|\underline{w}|} = \left(\min_{\underline{w}} \frac{|\underline{w}|}{|\underline{Z} \underline{w}|} \right)^{-1} = \left(\min_{\underline{v}} \frac{|\hat{\underline{Z}} \underline{v}|}{|\underline{v}|} \right)^{-1}$$

gilt, folgt (3.68):

$$\|\underline{Z}\| \leq \mu .$$

3.1.7 Norm eines Faltungsoperators

Sei g der Faltungsoperator wie er bei einem linearen zeitinvarianten System der Form (3.6a), (3.6b) mit dem Anfangszustand $\underline{x}_0 = \underline{0}$ auftritt:

$$\underline{y} = g \underline{u} = \underline{g} * \underline{u} = \int_0^t \underline{g}(t - \tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.74)$$

$\underline{u}(t), \underline{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ sind die Eingangs- und Ausgangsgrößen des linearen zeitinvarianten Systems, $\underline{g}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist die Gewichtsmatrix des Systems.

g ist nun genau dann stabiler Operator auf L_2^α , wenn die Laplace-Transformierte $\underline{G}(s)$ von $\underline{g}(t)$ nur Polstellen s_i mit

$$\operatorname{Re}(s_i) < -\alpha \quad (3.75)$$

besitzt.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die Norm von g abschätzen:

$$(\|\underline{y}\|_2^\alpha)^2 = \int_0^\infty |\underline{y}(t) e^{\alpha t}|^2 dt = \int_0^\infty |(\underline{g} * \underline{u})(t) e^{\alpha t}|^2 dt$$

Mit der Parsevalschen Gleichung (s. [7], S. 197) und dem Verschiebungssatz der Fourier-Transformation:

$$(\|\underline{y}\|_2^\alpha)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{G}(j\omega - \alpha) \underline{U}(j\omega - \alpha)|^2 d\omega$$

Die großen Buchstaben bezeichnen die Fourier-Transformierten der mit kleinen Buchstaben benannten Zeitfunktionen. Weiter:

$$\begin{aligned} (\|\underline{y}\|_2^\alpha)^2 &\leq \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{G}(j\omega - \alpha)\|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{U}(j\omega - \alpha)|^2 d\omega \\ &= \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{G}(j\omega - \alpha)\|^2 \int_0^\infty |\underline{u}(t) e^{\alpha t}|^2 dt \\ &= \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{G}(j\omega - \alpha)\|^2 (\|\underline{u}\|_2^\alpha)^2 \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte der Gewichtsmatrix $\underline{g}(t)$ ist hier identisch der Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ (Laplace-Transformierte).

Da die Norm von g durch

$$\|g\|_2^\alpha = \max_{\underline{u}} \frac{\|g \underline{u}\|_2^\alpha}{\|\underline{u}\|_2^\alpha} = \max_{\underline{u}} \frac{\|\underline{y}\|_2^\alpha}{\|\underline{u}\|_2^\alpha}$$

definiert ist (vgl. S.74 unten), ergibt sich aus der obigen Abschätzung

$$\|g\|_2^\alpha = \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{G}(j\omega - \alpha)\| \quad (3.76)$$

Für die anfallende Matrixnorm wählen wir die Spektralnrm, da sie zur Euklidischen Vektornorm passen muß. In (3.76) gilt tatsächlich das Gleichheitszeichen, da auch in der Abschätzung S.86 unten die Gleichheit mit einer speziellen Funktion \underline{u} erreicht wird.

Durch (3.76) wird die Norm eines Faltungsoperators auf die Norm einer Matrix zurückgeführt.

3.2 EIN KREISKRITERIUM FÜR MEHRGRÖSSENSYSTEME

In diesem Abschnitt sei das Kreiskriterium für Mehrgrößensysteme wie es von Rosenbrock in [13] dargestellt wird, wiedergegeben.

Bei diesem Kriterium sind Systeme zugelassen, die sich in ein lineares und in ein nichtlineares Teilsystem aufspalten lassen. Das nichtlineare Teilsystem muß dabei entkoppelt sein; die beschreibende Matrix hat Diagonalform. Es müßte jedoch auch ohne großen Aufwand möglich sein, den Satz für verkoppelte Nichtlinearitäten zu erweitern (s. Bemerkung S. 99 unten).

Der Beweis wird jedoch anders durchgeführt als in [13]. Es wird direkt der Banachsche Fixpunktsatz ausgenutzt (Satz 3.8). Auf diese Weise erhalten wir nicht direkt die asymptotische Stabilität des Zustandsmodells, sondern die L_2^a -Stabilität.

Gegenüber [13] werden die Voraussetzungen an das nichtlineare Teilsystem erweitert: Die Konstanten zur Begrenzung der nichtlinearen „Sektorfunktionen“ werden nicht auf positive beschränkt (Satz 3.12a).

Es liegt das lineare zeitinvariante System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad (3.77a)$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} \quad (3.77b)$$

mit $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u}(t), \underline{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (\underline{E}s - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad (3.78)$$

vor $(\underline{G}(s) \in \mathbb{C}^{m \times m})$. Das System (3.77a), (3.77b) setzen wir als Minimalrealisierung voraus.

$$\underline{u} = -\underline{F} \underline{y} + \underline{r} \quad (3.79)$$

Das System wird durch

$$\underline{u} = -\underline{F}\underline{y} + \underline{r} \quad (3.79)$$

rückgekoppelt, wobei

$$\underline{F} = \text{diag} (f_i(t, \underline{y})) \quad (3.80)$$

Die Elemente von \underline{F} lassen sich mit reellen Konstanten $\alpha_i < \beta_i$ abschätzen:

$$\alpha_i \leq f_i(t, \underline{y}) \leq \beta_i, \quad i = 1 \dots m \quad (3.81)$$

Weiterhin definieren wir:

$$\underline{\alpha} := \text{diag} (\alpha_i), \quad (3.82)$$

$$\underline{\beta} := \text{diag} (\beta_i), \quad (3.83)$$

$$\underline{\gamma} = \text{diag} (\gamma_i) := \text{diag} \left(\frac{1}{2}(\beta_i + \alpha_i) \right), \quad (3.84)$$

$$\underline{\delta} = \text{diag} (\delta_i) := \text{diag} \left(\frac{1}{2}(\beta_i - \alpha_i) \right), \quad (3.85)$$

$$\underline{\xi} = \text{diag} (\xi_i) := \text{diag} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i} \right) \right), \quad (3.86)$$

$$\underline{\eta} = \text{diag} (\eta_i) := \text{diag} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\beta_i} \right) \right). \quad (3.87)$$

Satz 3.12a: Es sei

$$\alpha_i < 0 < \beta_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.88)$$

und es gebe reelle positive Konstanten ϑ_i mit

$$\sum_{i=1}^m \vartheta_i^{-2} \leq k < 1 \quad (3.89)$$

Nun gelte

$$|\zeta_i + g_{ii}(s)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |g_{ij}(s)| \leq -\frac{\eta_i}{\vartheta_i}, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.90a)$$

oder alternativ

$$|\zeta_j + g_{jj}(s)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |g_{ij}(s)| \leq -\frac{\eta_j}{\vartheta_j}, \quad j = 1 \dots m, \quad (3.90b)$$

mit $s = -a + j\omega$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Weiterhin sei das lineare zeitinvariante System (3.77a), (3.77b) ohne Rückkopplung L_2^a -stabil. Dann ist das System (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung (3.79) L_2^a -stabil.

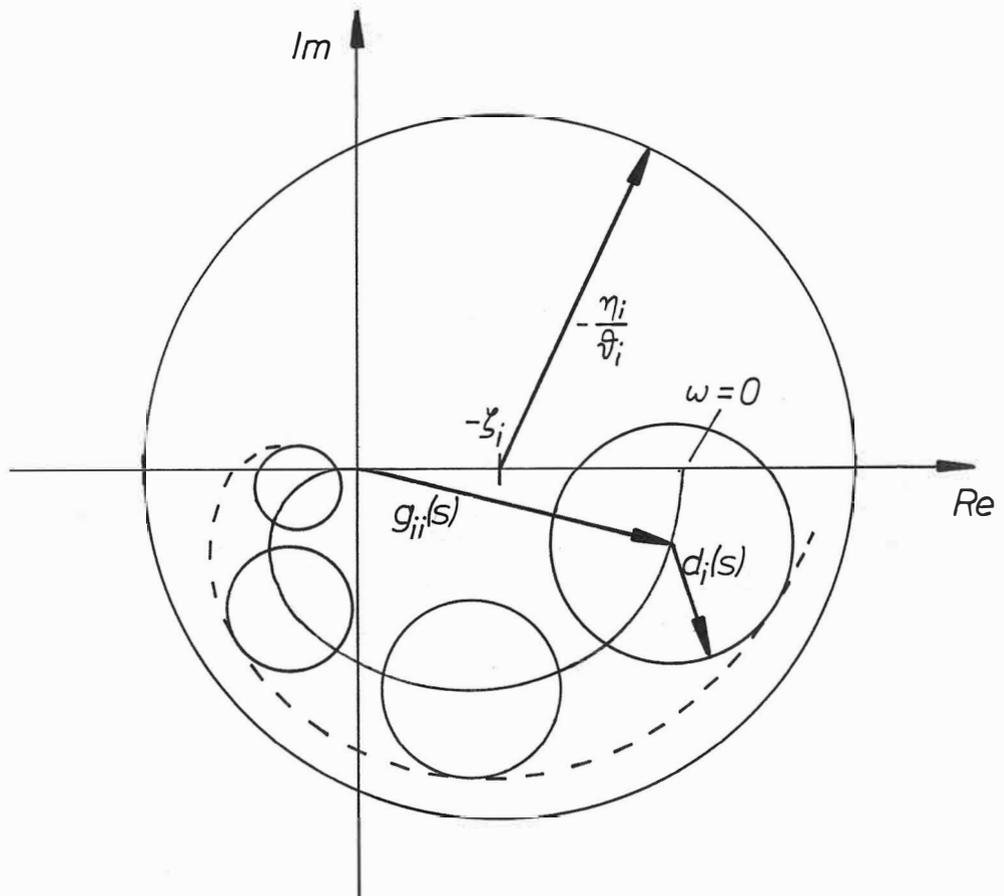


Bild 15a: Graphische Interpretation der Bedingung (3.90a) bzw. (3.90b). Dabei ist $d_i(s)$ die Summe der Beträge der Nichtdiagonalelemente von $\underline{G}(s)$ entsprechend (3.90a) bzw. (3.90b).

Kreises mit dem Mittelpunkt $-\zeta_i$ und Radius $-\frac{\eta_i}{\vartheta_i}$ liegen. Bild 15a

$d_i(s)$ die Summe der Beträge der Nichtdiagonalelemente von $\underline{G}(s)$

Satz 3.12b: Es sei

$$\alpha_i \beta_i > 0, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.91)$$

und es gebe reelle positive Konstanten ϑ_i mit

$$\sum_{i=1}^m \vartheta_i^{-2} \leq k < 1. \quad (3.92)$$

Nun gelte

$$|\zeta_i + g_{ii}(s)| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |g_{ij}(s)| \geq \vartheta_i \eta_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.93a)$$

oder alternativ

$$|\zeta_j + g_{jj}(s)| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |g_{ij}(s)| \geq \vartheta_j \eta_j, \quad j = 1 \dots m, \quad (3.93b)$$

mit $s = -a + j\omega$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Weiterhin sei das lineare zeitinvariante System (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung

$$\underline{u} = -\underline{\hat{\zeta}} \underline{y} + \underline{r} \quad (3.94)$$

L_2^a -stabil. Dann ist das System (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung (3.79) L_2^a -stabil.

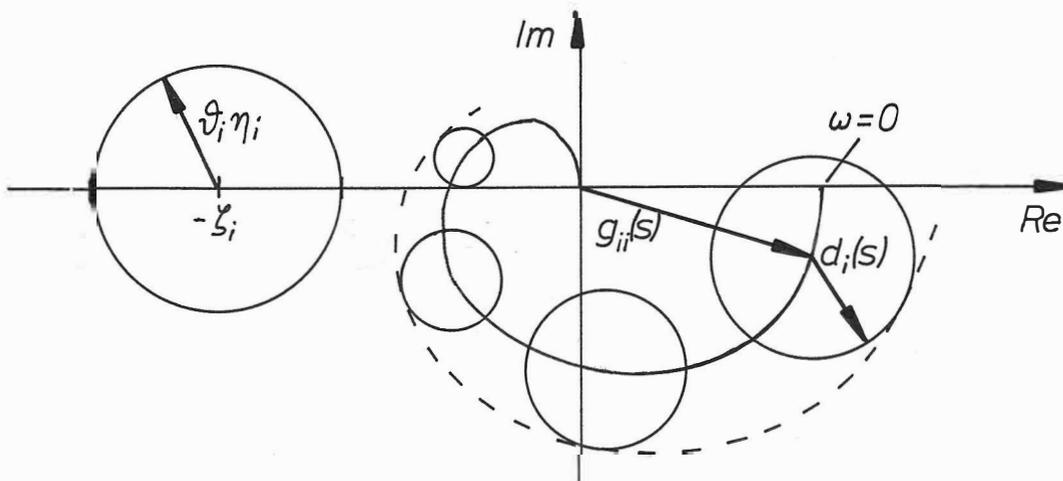


Bild 15b: Graphische Interpretation von (3.93a) bzw. (3.93b). $d_i(s)$ ist wieder die Summe der Beträge der Nichtdiagonalelemente entsprechend (3.93a) bzw. (3.93b).

Satz 3.13: Es existiere die Inverse

$$\hat{\underline{G}}(s) = \underline{G}^{-1}(s) \quad (3.95)$$

und es gebe reelle Konstanten ϑ_i mit

$$\sum_{i=1}^m \vartheta_i^{-2} \leq k < 1 \quad (3.96)$$

Nun gelte

$$|\gamma_i + \hat{g}_{ii}(s)| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{g}_{ij}(s)| \geq \vartheta_i \delta_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.97a)$$

oder alternativ

$$|\gamma_j + \hat{g}_{jj}(s)| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |\hat{g}_{ij}(s)| \geq \vartheta_j \delta_j, \quad j = 1 \dots m, \quad (3.97b)$$

mit $s = -a + j\omega$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei das lineare

Weiterhin sei lineare zeitinvariante System (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung

$$\underline{u} = -\underline{\gamma} \underline{y} + \underline{r} \quad (3.98)$$

L_2^a -stabil. Dann ist das System (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung (3.79) L_2^a -stabil.

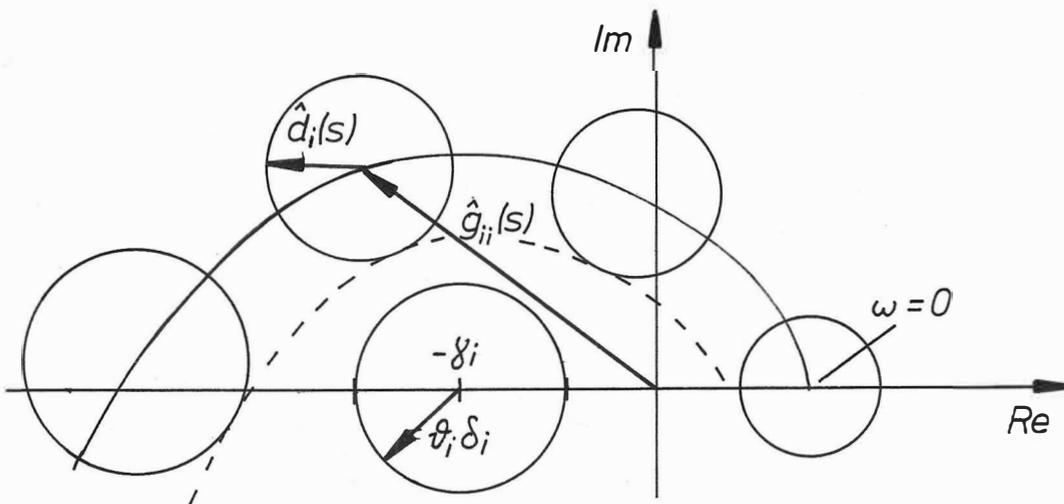


Bild 16: Graphische Interpretation von (3.97a) bzw. (3.97b). $\hat{d}_i(s)$ ist die Summe der Beträge der Nichtdiagonalelemente von $\hat{\underline{G}}(s)$ entsprechend (3.97a) bzw. (3.97b).

Bemerkungen zu den Sätzen 3.12a, 3.12b und 3.13:

Die Sätze 3.12a und 3.12b stellen Bedingungen an die Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$, während Satz 3.13 Forderungen an die inverse Übertragungsmatrix $\hat{\underline{G}}(s)$ stellt. In den Sätzen 3.12a und 3.12b wird nach den Vorzeichen von α_i und β_i unterschieden: Die Bedingungen (3.88) bzw. (3.91) müssen jeweils für alle i erfüllt werden. Dem gegenüber erhebt der Satz 3.13 keine Einschränkungen an die α_i und β_i .

In den Zeichnungen Bild 15a, 15b und 16 läßt sich gleichzeitig die Stabilität des linearen Teilsystems nach dem Nyquistkriterium (Satz 3.5, S.68, vgl. Bild 12) bzw. dem inversen Nyquistkriterium (Satz 3.7, S.72, vgl. Bild 13) überprüfen, wie es die Sätze 3.12a, 3.12b und 3.13 verlangen.

Bei der Stabilitätsuntersuchung können wir nachfolgend die Anfangszustände außer Acht lassen und zu Null annehmen ohne dabei eine Einschränkung vorzunehmen: Da auf S.88 unten das lineare Teilsystem als Minimalrealisierung vorausgesetzt wurde, ist dieses auch vollständig steuerbar und erreichbar. Würden wir nun zum Zeitpunkt $t_0 > 0$ einen Anfangszustand \underline{x}_0 des linearen Teilsystems annehmen, so könnten wir stets eine Steuerfunktion \underline{u}_0 über dem Intervall $[0, t_0]$ finden, die den Zustand $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ ausgehend vom Zustand $\underline{x}(0) = \underline{0}$ erreicht. Auch nach Schließen der Rückkopplung (3.79) gibt es weiterhin die Steuerfunktion $\underline{r}_0 = \underline{u}_0 + \underline{F} \underline{y}_0$ über dem Intervall $[0, t_0]$, die den Zustand \underline{x}_0 erreicht. Wegen des endlichen Zeitintervalls $[0, t_0]$ ist sichergestellt, daß eine Eingangsfunktion \underline{r} , die über $[0, t_0]$ identisch \underline{r}_0 ist, Element des Raumes L_2^a ist. Wir können also stets von einem Anfangszustand $\underline{x}(0) = 0$ ausgehen.

Aus der vollständigen Beobachtbarkeit des linearen Teilsystems erhalten wir mit der Stabilität der Ausgangsgröße auch die Stabilität der Zustandsgrößen.

Bei den nachfolgenden Beweisen wird vorausgesetzt, daß die durch die Matrix \underline{F} vermittelte Abbildung $\underline{y} \rightarrow \underline{F}\underline{y}$ linear ist: \underline{F} besitzt also keine Abhängigkeit von \underline{y} mehr, kann aber noch zeitvariant sein. Ist nämlich die Stabilität für die Klasse aller linearen durch \underline{F} vermittelten Abbildungen gezeigt (wobei jeweils (3.81) erfüllt ist), so läßt sich zu jeder beliebigen nichtlinearen Abbildung mit

$$\underline{F} = \text{diag} (f_i(t, \underline{y}))$$

und jeder Funktion \underline{y} auch eine lineare Abbildung mit

$$\underline{F}' = \text{diag} (f_i'(t)) \quad , \quad (3.99)$$

angeben, wobei $f_i := f_i(t, \underline{y}(t))$, (3.100)

angeben $f_i'(t) := f_i'(t, \underline{y}(t))$, (3.100)

so daß dann auch die Stabilität für nichtlineare Abbildungen folgt (für jedes \underline{y} ergibt sich allerdings ein anderes \underline{F}').

Aus der Stabilität des Systems (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung (3.79) folgt im Übrigen auch die Stabilität mit der Rückkopplung

$$\underline{u} = \underline{F} (\underline{r} - \underline{y}) \quad , \quad (3.101)$$

wie man sich mit der Abschätzung (3.81) klarmachen kann.

Um die Stabilität zu zeigen, wollen wir den Satz 3.9 (S.77) anwenden. Um jedoch eine günstige Abschätzung für die Operatornorm zu erhalten, ist es nötig, die Struktur des Systems umzuformen.

Beweis 3.12a: Die Strukturumformungen werden durch das Umzeichnen des Strukturbildes durchgeführt. (3.77a), (3.77b), (3.79) hat folgende Struktur (g ist der Faltungoperator des linearen Teilsystems):

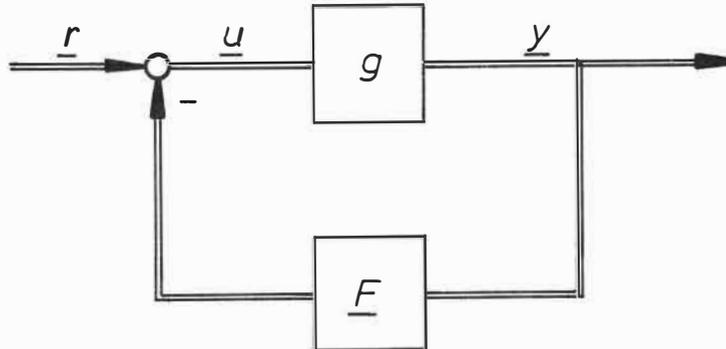


Bild 17a.

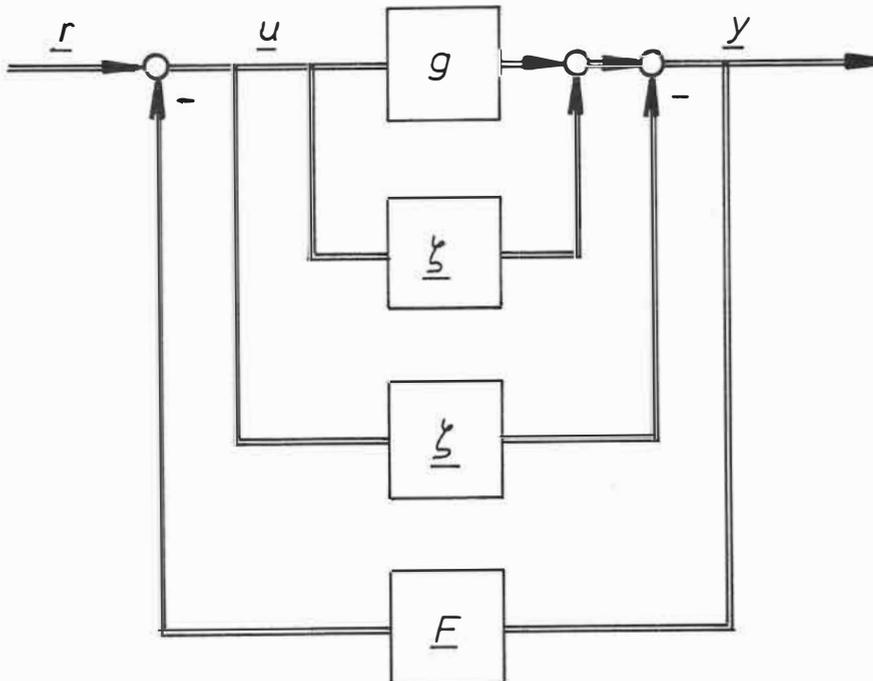


Bild 17b.



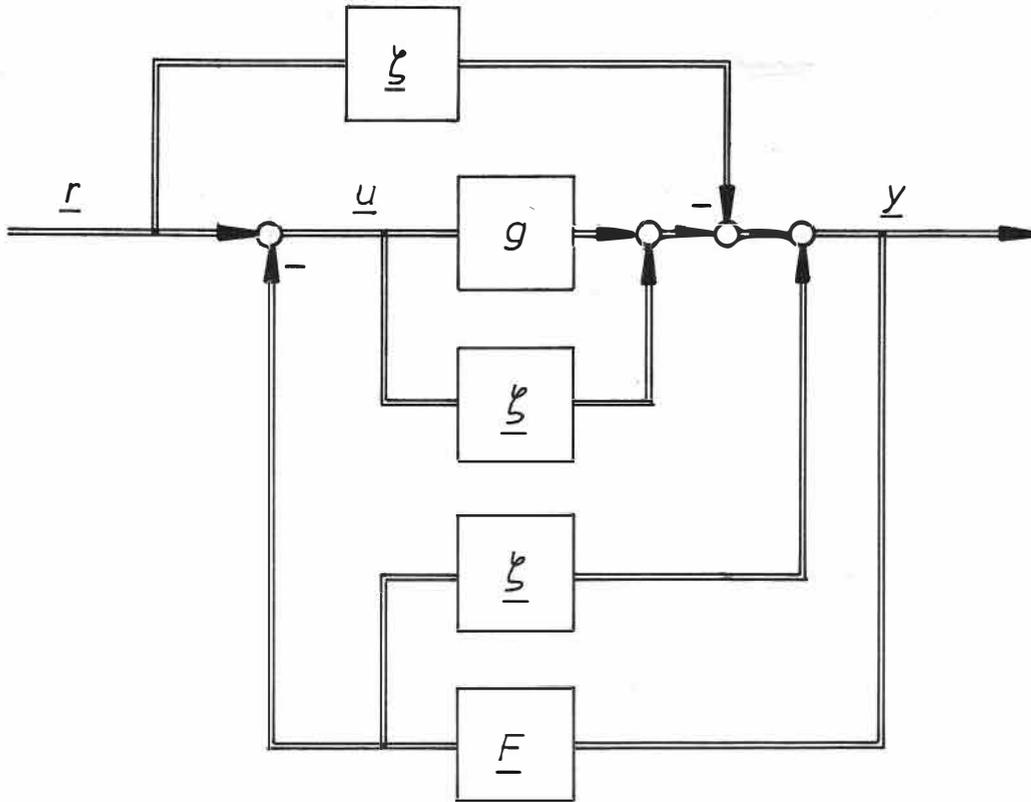


Bild 17c.

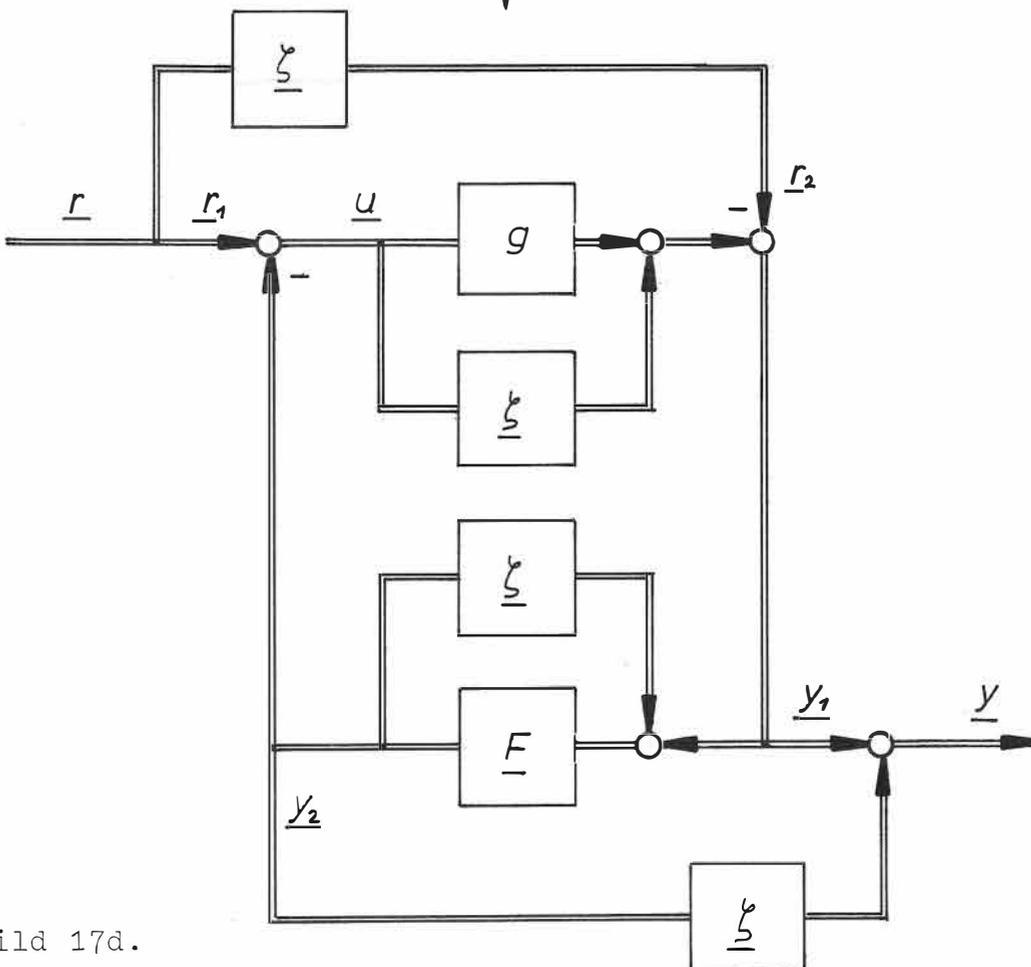


Bild 17d.

Da die durch \underline{F} vermittelte Abbildung und damit das gesamte System als linear vorausgesetzt wird (s. S.94 oben), läßt sich die Stabilität durch Untersuchung der einzelnen \underline{r}_i und \underline{y}_i in Bild 17d und nachträglichen Superpositionieren beantworten. Dabei ist aber jeweils die Stabilität des geschlossenen Kreises maßgeblich, sofern die einzelnen Übertragungsglieder stabil sind. g ist jedoch nach Voraussetzung des Satzes 3.12a L_2^a -stabil, damit auch $g + \underline{g}$. Statt der mit \underline{g} rückgekoppelten Matrix \underline{F} in Bild 17d können wir auch die Matrix

$$\underline{F}_{\underline{g}} := (\underline{E} - \underline{F}\underline{g})^{-1} \underline{F} = \text{diag} \left(\frac{f_i}{1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i}) f_i} \right) \quad (3.102)$$

setzen, für deren Elemente $f_{\underline{g}i}$ wir unter Beachtung von (3.81) und (3.88) die Abschätzung

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\beta_i} \right) \right]^{-1} \leq \frac{f_i}{1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i}) f_i} \leq \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_i} - \frac{1}{\alpha_i} \right) \right]^{-1}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{\eta_i} \leq f_{\underline{g}i} \leq -\frac{1}{\eta_i}, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.103)$$

angeben können. Also läßt sich auch

$$\underline{F}_{\underline{g}} = \underline{\eta}^{-1} \underline{H} = \underline{H} \underline{\eta}^{-1} \quad (3.104)$$

schreiben, wobei

$$\underline{H} = \text{diag} (h_i) := \text{diag} (-\eta_i f_{\underline{g}i}) \quad (3.105)$$

Dann ist

$$-1 \leq h_i \leq 1, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.106)$$

und für die Spektralnorm gilt deshalb

$$\|\underline{H}\| \leq 1 \quad (3.107)$$

und für die Spektralnorm gilt deshalb

$$\|\underline{H}\| \leq 1 \quad (3.107)$$

Mit (3.104) läßt sich auch die Norm von \underline{F}_g abschätzen; dann ist auch \underline{F}_g ein stabiler Operator auf L_2^a (es hätte sein können, daß die Inverse in (3.102) nicht existiert, dies ist nun ausgeschlossen).

Schreiben wir jetzt die Voraussetzungen (3.90a) bzw. (3.90b) um in

$$|\eta_i^{-1}(\zeta_i + g_{ii}(s))| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\eta_i^{-1} g_{ij}(s)| \leq \frac{1}{\sigma_i}, \quad i = 1 \dots m$$

bzw.

$$|(\zeta_j + g_{jj}(s))\eta_j^{-1}| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |g_{ij}(s)\eta_j^{-1}| \leq \frac{1}{\sigma_j}, \quad j = 1 \dots m$$

mit $s = -a + j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Unter Anwendung von Satz 3.10a (S.80) und Berücksichtigung der Voraussetzung (3.89) folgt hieraus

$$\|\eta^{-1}(\underline{\zeta} + \underline{G}(s))\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.108a)$$

$$\text{bzw.} \quad \|(\underline{\zeta} + \underline{G}(s))\eta^{-1}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.108b)$$

mit $s = -a + j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Nun muß nach Satz 3.9 (S.77) die Norm des „Kreisübertragungsoperators“ kleiner 1 sein:

$$\|\underline{F}_g(\underline{\zeta} + g)\|_2^a \leq \nu < 1$$

$$\text{oder} \quad \|(\underline{\zeta} + g)\underline{F}_g\|_2^a \leq \nu < 1$$

Nun gilt aber mit (3.104), (3.107), (3.108a) und der Norm des Faltungsoperators nach Abschnitt 3.1.7, S. 87, (3.76):

$$\begin{aligned} \|\underline{F}_y(\underline{z} + g)\|_2^a &= \|\underline{H} \underline{\eta}^{-1}(\underline{z} + g)\|_2^a \leq \|\underline{H}\| \|\underline{\eta}^{-1}(\underline{z} + g)\|_2^a \\ &= \|\underline{H}\| \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{\eta}^{-1}(\underline{z} + \underline{G}(-a+j\omega))\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.109a) \end{aligned}$$

bzw. mit (3.108b):

$$\begin{aligned} \|(\underline{z} + g) \underline{F}\|_2^a &= \|(\underline{z} + g) \underline{\eta}^{-1} \underline{H}\|_2^a \leq \|(\underline{z} + g) \underline{\eta}^{-1}\|_2^a \|\underline{H}\| \\ &= \sup_{\omega=0}^{\infty} \|(\underline{z} + \underline{G}(-a+j\omega)) \underline{\eta}^{-1}\| \|\underline{H}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.109b) \end{aligned}$$

Das System (3.77a), (3.77b) mit der Rückkopplung (3.79) ist also unter den Voraussetzungen dieses Satzes L_2^a -stabil.

Die Vorgehensweise dieses Beweises war die, das nichtlineare Teilsystem so zu transformieren (Matrix \underline{H}), daß sich eine möglichst günstige Abschätzung ergab ($\|\underline{H}\| \leq 1$). Prinzipiell müßte auf diese Weise auch eine Behandlung von verkoppelten Nichtlinearitäten möglich sein, da zwar die Diagonalform der Matrizen \underline{F} , \underline{F}_y , \underline{z} , $\underline{\eta}$, \underline{H} manche Schritte vereinfacht, dies jedoch nicht zwingend erforderlich scheint.

Beweis 3.12b: Wir gehen von der gleichen Strukturumformung aus wie die in Bild 17a bis 17d vorgenommene, nutzen dann jedoch den zweiten Teil des Satzes 3.9 (S.77) aus, nach dem die Norm des inversen „Kreisübertragungsoperators“ kleiner 1 sein muß. Dazu müssen wir auch die einzelnen Blöcke durch ihre Inversen beschreiben: Die Matrix \underline{F}_g (3.102) geht in

$$\hat{\underline{F}}_g = \underline{F}^{-1} (\underline{E} - \underline{F}_g) = \text{diag} \left(\frac{1}{f_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i} \right) \right) \quad (3.110)$$

über (\underline{F}^{-1} existiert, da $f_i \neq 0$), für deren Elemente \hat{f}_{gi} wir unter Beachtung von (3.81) und (3.91) die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_i} - \frac{1}{\alpha_i} \right) \leq \frac{1}{f_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\beta_i} \right)$$

$$\leftrightarrow -\eta_i \leq \hat{f}_{gi} \leq \eta_i, \quad i = 1 \dots m \quad (3.111)$$

angeben können. Dann schreiben wir wieder

$$\hat{\underline{F}}_g = \underline{\eta} \hat{\underline{H}} = \hat{\underline{H}} \underline{\eta} \quad (3.112)$$

mit $\hat{\underline{H}} = \text{diag}(\hat{h}_i) := \text{diag} \left(\frac{\hat{f}_{gi}}{\eta_i} \right), \quad (3.113)$

wobei $-1 \leq \hat{h}_i \leq 1 \quad (3.114)$

und damit die Spektralnorm

$$\|\hat{\underline{H}}\| \leq 1 \quad (3.115)$$

wird.

Der Operator $\underline{g} + g$ wird durch den Inversen

$$\hat{g} := (\underline{g} + g) = (\underline{E} + \hat{\underline{g}} g)^{-1} \hat{\underline{g}} \quad (3.116)$$

ersetzt. Da nach Voraussetzung der mit $\hat{\underline{z}}$ rückgekoppelte Kreis L_2^a -stabil ist, besitzt $\det(\underline{E} + \underline{L}(s)) = \det(\underline{E} + \hat{\underline{z}} \underline{G}(s))$ nur Nullstellen s_i mit $\operatorname{Re}(s_i) < a$ (vgl. (3.22), S.66). Da diese s_i auch die Polstellen der Laplace-Transformierten $(\underline{E} + \hat{\underline{z}} \underline{G}(s)) \hat{\underline{z}}$ sind, ist auch der Operator $\hat{\underline{g}}$ (3.116) L_2^a -stabil.

Schreiben wir jetzt die Voraussetzung (3.93a) um in

$$|\hat{\eta}_i \hat{\vartheta}_i (\underline{z}_i + g_{ii}(s))| - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m |\hat{\eta}_i \hat{\vartheta}_i g_{ij}(s)| \geq 1 \quad \leftrightarrow$$

$$|\hat{\eta}_i (\hat{\vartheta}_i (\underline{z}_i + g_{ii}(s)) \hat{\vartheta}_i) \hat{\vartheta}_i| - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m |\hat{\eta}_i (\hat{\vartheta}_i g_{ij}(s) \hat{\vartheta}_j) \hat{\vartheta}_j| \geq 1$$

mit $i = 1 \dots m$, $s = -a + j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Unter Anwendung des Satzes 3.10b (S.80) und Berücksichtigung von (3.92) folgt daraus

$$\|(\hat{\underline{\eta}} \hat{\underline{\Theta}} (\underline{z} + \underline{G}(s)) \underline{\Theta})^{-1}\| = \|(\underline{z} + \hat{\underline{\Theta}} \underline{G}(s) \underline{\Theta})^{-1} \underline{\eta}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.117a)$$

mit $s = -a + j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $\underline{\Theta} = \operatorname{diag}(\hat{\vartheta}_i)$.

Ganz analog gehen wir mit (3.93b), wiederum mit Satz 3.10b und (3.92) vor:

$$|(\underline{z}_j + g_{jj}(s)) \hat{\vartheta}_j \hat{\eta}_j| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |g_{ij}(s) \hat{\vartheta}_j \hat{\eta}_j| \geq 1 \quad \leftrightarrow$$

$$|\hat{\vartheta}_j (\hat{\vartheta}_j (\underline{z}_j + g_{jj}(s)) \hat{\vartheta}_j) \hat{\eta}_j| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |\hat{\vartheta}_i (\hat{\vartheta}_i g_{ij}(s) \hat{\vartheta}_j) \hat{\eta}_j| \geq 1$$

$$\rightarrow \|(\underline{\Theta} (\underline{z} + \underline{G}(s)) \hat{\underline{\Theta}} \hat{\underline{\eta}})^{-1}\| = \|\underline{\eta} (\underline{z} + \underline{\Theta} \underline{G}(s) \hat{\underline{\Theta}})^{-1}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.117b)$$

mit $j = 1 \dots m$, $s = -a + j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Die L_2^a -Stabilität ist nach Satz 3.9 (S.77) gesichert, wenn die Norm des inversen „Kreisübertragungsoperators“ kleiner 1 ist. Fügen wir vorher in den Kreis noch die Matrix $\underline{E} = \underline{\Theta} \hat{\underline{\Theta}}$ oder $\underline{E} = \hat{\underline{\Theta}} \underline{\Theta}$ ein und „schneiden den Kreis zwischen $\underline{\Theta}$ und $\hat{\underline{\Theta}}$ auf“, so ergibt das die Forderungen

$$\|\hat{\underline{\theta}} (\underline{z} + g)^{-1} \hat{\underline{F}}_{\underline{z}} \underline{\theta}\|_2^a \leq v < 1$$

oder $\|\underline{\theta} \hat{\underline{F}}_{\underline{z}} (\underline{z} + g)^{-1} \hat{\underline{\theta}}\|_2^a \leq v < 1$

Dies zeigen wir nun mit (3.112), (3.115), (3.117a) und der Norm des Faltungsoperators nach (3.76), S.87. Weiter berücksichtigen wir die Kommutativität von Diagonalmatrizen:

$$\begin{aligned} \|\hat{\underline{\theta}} (\underline{z} + g)^{-1} \hat{\underline{F}}_{\underline{z}} \underline{\theta}\|_2^a &= \|\hat{\underline{\theta}} (\underline{z} + g)^{-1} \underline{\theta} \underline{\eta} \hat{\underline{H}}\|_2^a \\ &\leq \|(\underline{z} + \hat{\underline{\theta}} g \underline{\theta})^{-1} \underline{\eta}\|_2^a \|\hat{\underline{H}}\| \\ &\leq \sup_{\omega=0}^{\infty} \|(\underline{z} + \hat{\underline{\theta}} \underline{G}(-a+j\omega) \underline{\theta})^{-1} \underline{\eta}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.118a) \end{aligned}$$

bzw. mit (3.117b):

$$\begin{aligned} \|\underline{\theta} \hat{\underline{F}}_{\underline{z}} (\underline{z} + g)^{-1} \hat{\underline{\theta}}\|_2^a &= \|\hat{\underline{H}} \underline{\eta} \underline{\theta} (\underline{z} + g)^{-1} \hat{\underline{\theta}}\|_2^a \\ &\leq \|\hat{\underline{H}}\| \|\underline{\eta} (\underline{z} + \underline{\theta} g \hat{\underline{\theta}})^{-1}\|_2^a \\ &\leq \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{\eta} (\underline{z} + \underline{\theta} \underline{G}(-a+j\omega) \hat{\underline{\theta}})^{-1}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.118b) \end{aligned}$$

Damit ist der Satz 3.12b bewiesen.

Beweis 3.13: Das Strukturbild des Systems (3.77a), (3.77b), (3.79) wird umgeformt:

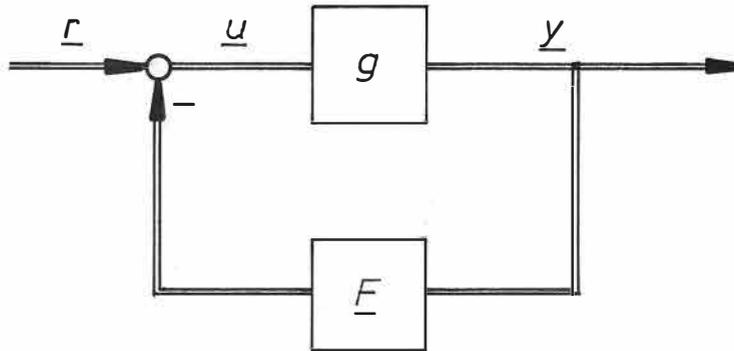


Bild 18a.

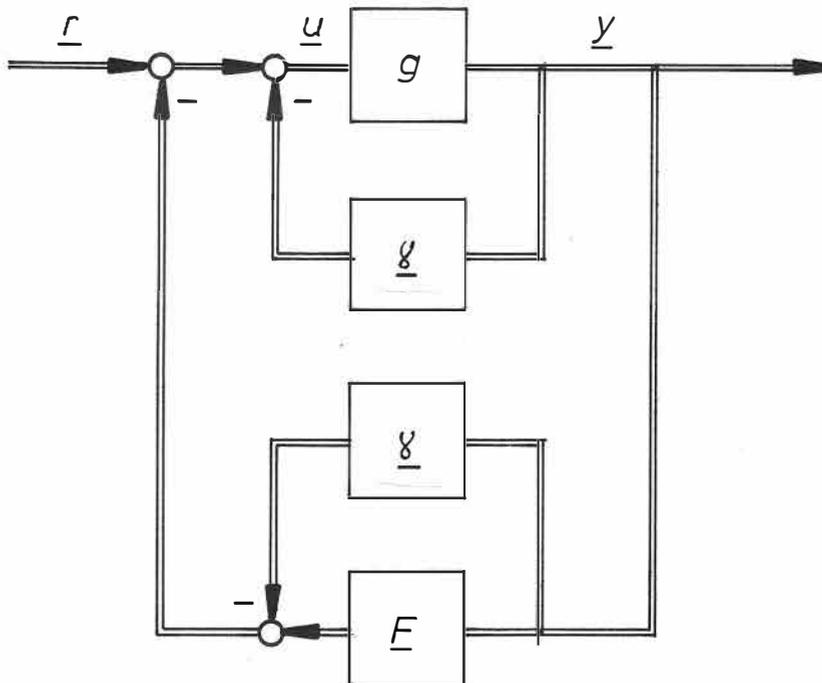


Bild 18b.

Der mit \underline{g} rückgekoppelte Operator g in Bild 18b,

$$\underline{g}_y := (\underline{E} + g \underline{y})^{-1} g = (\underline{y} + \hat{g})^{-1}, \quad (3.119)$$

ist nach Voraussetzung L_2^a -stabil.

Für die Elemente f_{y_i} von

$$\underline{F}_y := \underline{F} - \underline{g} = \text{diag} \left(f_i - \frac{1}{2} (\beta_i + \alpha_i) \right) \quad (3.120)$$

gilt mit (3.81) die Abschätzung

$$\frac{1}{2} (\alpha_i - \beta_i) \leq f_i - \frac{1}{2} (\beta_i + \alpha_i) \leq \frac{1}{2} (\beta_i - \alpha_i) \quad (3.121)$$

$$\leftrightarrow -\delta_i \leq f_{y_i} \leq \delta_i, \quad i = 1 \dots m. \quad (3.121)$$

Dann schreiben wir

$$\underline{F}_y = \underline{\delta} \underline{L} = \underline{L} \underline{\delta} \quad (3.122)$$

$$\text{mit } \underline{L} = \text{diag} (l_i) := \text{diag} \left(\frac{f_{y_i}}{\delta_i} \right) \quad (3.123)$$

$$\text{und } -1 \leq l_i \leq 1, \quad i = 1 \dots m \quad (3.124)$$

sowie der Spektralnorm

$$\|\underline{L}\| \leq 1. \quad (3.125)$$

Aus den Voraussetzungen (3.97a) bzw. (3.97b) folgt mit dem Satz 3.10b (S. 80) und (3.96) (vgl. die ausführlichere Rechnung in Beweis 3.12a, S. 101):

$$\|(\underline{y} + \hat{\underline{\theta}} \hat{G}(s) \underline{\theta})^{-1} \underline{\delta}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.126a)$$

$$\text{bzw. } \|\underline{\delta} (\underline{y} + \underline{\theta} \hat{G}(s) \hat{\underline{\theta}})^{-1}\| \leq \sqrt{k} < 1. \quad (3.126b)$$

mit $s = -a + j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Wir wenden Satz 3.9 (S.77) an. Vorher fügen wir wieder in den Kreis die Matrizen $\underline{E} = \underline{\theta} \hat{\underline{\theta}}$ oder $\underline{E} = \hat{\underline{\theta}} \underline{\theta}$ ein (wie in Beweis 3.12b, S.101 unten). Das führt uns zu den Forderungen

$$\|\hat{\underline{\theta}} (\underline{y} + \hat{\underline{g}})^{-1} \underline{F}_y \underline{\theta}\|_2^a \leq \nu < 1$$

oder
$$\|\underline{\theta} \underline{F}_y (\underline{y} + \hat{\underline{g}})^{-1} \hat{\underline{\theta}}\|_2^a \leq \nu < 1$$

Dies zeigen wir nun mit (3.122), (3.125), (3.126a) und (3.76):

$$\begin{aligned} \|\hat{\underline{\theta}} (\underline{y} + \hat{\underline{g}})^{-1} \underline{F}_y \underline{\theta}\|_2^a &= \|\hat{\underline{\theta}} (\underline{y} + \hat{\underline{g}})^{-1} \underline{\theta} \underline{\delta} \underline{L}\|_2^a \\ &\leq \|(\underline{y} + \hat{\underline{\theta}} \hat{\underline{g}} \underline{\theta})^{-1} \underline{\delta}\|_2^a \|\underline{L}\| \\ &\leq \sup_{\omega=0}^{\infty} \|(\underline{y} + \hat{\underline{\theta}} \underline{G}(-a+j\omega) \underline{\theta})^{-1}\| \|\underline{\delta}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.127a) \end{aligned}$$

bzw. mit (3.126b):

$$\begin{aligned} \|\underline{\theta} \underline{F}_y (\underline{y} + \hat{\underline{g}})^{-1} \hat{\underline{\theta}}\|_2^a &= \|\underline{L} \underline{\delta} \underline{\theta} (\underline{y} + \hat{\underline{g}})^{-1} \hat{\underline{\theta}}\|_2^a \\ &\leq \|\underline{L}\| \|\underline{\delta} (\underline{y} + \underline{\theta} \hat{\underline{g}} \hat{\underline{\theta}})^{-1}\|_2^a \\ &\leq \sup_{\omega=0}^{\infty} \|\underline{\delta} (\underline{y} + \underline{\theta} \hat{\underline{G}}(-a+j\omega) \hat{\underline{\theta}})^{-1}\| \leq \sqrt{k} < 1 \quad (3.127b) \end{aligned}$$

Mit dem Satz 3.11 über Abschätzungen von Matrizenormen wird es möglich, ein Kreiskriterium aufzustellen, das die Konstanten ϑ_i der Sätze 3.12a, 3.12b, 3.13 nicht mehr enthält. Dafür werden aber gleichzeitig Forderungen an die Zeilen- und Spaltensummen von $\underline{G}(s)$ bzw. $\hat{\underline{G}}(s)$ gestellt (s. Cook [5]).

Es scheint aber nicht möglich den sich ergebenden Satz für die Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ ([5], Theorem 8) in der gleichen Weise für „Sektoren“ $\alpha_i < 0 < \beta_i$ zu verallgemeinern wie dies mit Satz 3.12a ausgehend von Satz 3.12b gelungen ist.

3.3 GEKOPPELTE MATHIEUSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Gekoppelte Mathieusche Differentialgleichungen treten bei der Beschreibung von Systemen mit parametrisch erzeugten Schwingungen oder bei parametrischen Verstärkern auf (s. [17]).

Wir wollen hier die Stabilität von zwei gekoppelten Mathieuschen Differentialgleichungen mit Hilfe des Mehrgrößenkreiskriteriums untersuchen.

Lauten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + 2d_1\omega_1 \dot{v}_1 + \omega_1^2 v_1 + (F_{11} v_1 + F_{12} v_2) \varepsilon \cos t &= h_1 \varepsilon \cos t, \\ \ddot{v}_2 + 2d_2\omega_2 \dot{v}_2 + \omega_2^2 v_2 + (F_{21} v_1 + F_{22} v_2) \varepsilon \cos t &= h_2 \varepsilon \cos t, \end{aligned} \quad (3.128)$$

so bringen wir sie mit

$$\begin{aligned} \underline{A} &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ -\omega_1^2 & -2d_1\omega_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & -\omega_2^2 & -2d_2\omega_2 \end{bmatrix}, & \underline{B} &:= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \varepsilon & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon \end{bmatrix} & \underline{x} &:= \begin{bmatrix} v_1 \\ \dot{v}_1 \\ v_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} \\ \underline{C} &:= \begin{bmatrix} F_{11} & \cdot & F_{12} & \cdot \\ F_{21} & \cdot & F_{22} & \cdot \end{bmatrix} & \underline{F} &:= \begin{bmatrix} \cos t & \cdot \\ \cdot & \cos t \end{bmatrix} \\ \underline{r} &:= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \cos t \end{aligned} \quad (3.129)$$

auf die Form (3.77a), (3.77b), (3.79). \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} ist mit $\varepsilon > 0$, $F_{ij} \neq 0$ eine Minimalrealisierung. Die Übertragungsmatrix (3.78) des linearen Teilsystems wird dann

$$\underline{G}(s) = \epsilon \begin{bmatrix} \frac{F_{11}}{D_1(s)} & \frac{F_{12}}{D_2(s)} \\ \frac{F_{21}}{D_1(s)} & \frac{F_{22}}{D_2(s)} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$\text{mit} \quad D_1(s) := s^2 + 2d_1\omega_1 s + \omega_1^2 \quad (3.131a)$$

$$\text{und} \quad D_2(s) := s^2 + 2d_2\omega_2 s + \omega_2^2 \quad (3.131b)$$

Der offene Kreis ist für reelle positive Konstanten d_i, ω_i in jedem Fall L_2^0 -stabil, wie man aus (3.131a), (3.131b) erkennt oder der Matrix \underline{A} in (3.129) entnimmt.

Wenden wir zur Prüfung der Stabilität den Satz 3.12a mit der Bedingung (3.90b) an (Spaltensumme), so können wir sogar noch algebraisch vorgehen.

Aus der Matrix \underline{F} (3.129) ergibt sich entsprechend (3.81), (3.86), (3.87) (S.89)

$$-\alpha_i = \beta_i = 1, \quad \zeta_i = 0, \quad \eta_i = -1, \quad i = 1, 2 \quad (3.132)$$

Dann lautet (3.90b):

$$\frac{\epsilon (|F_{1i}| + |F_{2i}|)}{|D_i(j\omega)|} \leq \frac{1}{\theta_i}, \quad i = 1, 2, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (3.133)$$

Es gilt für $d_i \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$$\max_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{|D_i(j\omega)|} = \frac{1}{2d_i\omega_i^2 \sqrt{1-d_i^2}} \quad (3.134a)$$

(VZ2-Glied s. z.B. [8], S.131f). Und für $d_i \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$$\max_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{|D_i(j\omega)|} = \frac{1}{\omega_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.134b)$$

Mit den Abkürzungen

$$m_i := \begin{cases} \frac{1}{2d_i \omega_i^2 \sqrt{1 - d_i^2}} & \text{für } d_i \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \frac{1}{\omega_i^2} & \text{für } d_i \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{cases} \quad (3.135)$$

$$\text{und } \varphi_{ji} := \varepsilon |F_{ji}| m_i \quad (3.136)$$

geht (3.133) in

$$\varphi_{1i} + \varphi_{2i} \leq \frac{1}{\vartheta_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.137)$$

über. Da nach (3.89)

$$\frac{1}{\vartheta_1} + \frac{1}{\vartheta_2} \leq k < 1$$

sein muß, führt das für die φ_{ji} zu der Forderung

$$(\varphi_{11} + \varphi_{21})^2 + (\varphi_{12} + \varphi_{22})^2 \leq k < 1. \quad (3.138)$$

Die Menge aller möglichen φ_{ji} , für die nach dem Satz 3.12a die L_2^0 -Stabilität gesichert ist, bilden ein Gebiet, dessen Rand eine Fläche 2. Ordnung im \mathbb{R}^4 ist.

Im folgenden wird für einige spezielle Parameter die Bedingung (3.133) graphisch dargestellt (entsprechend Bild 15a, S. 90). Die obere Zeichnung entspricht jeweils $i = 1$, die untere $i = 2$ in (3.133). Obwohl wir die Stabilität auch rein algebraisch mit (3.135), (3.136), (3.138) untersuchen können, sei der Anschauung wegen nicht auf die graphische Darstellung verzichtet. Um eine Vorstellung über die Schärfe der einfließenden Abschätzungen zu vermitteln, ist die entsprechende Operatornorm bei den Beispielen mit angegeben (im Normalfall scheidet die Berechnung wegen des Aufwandes aus). Nach Satz 3.9 (S. 77) muß dieser Wert nur kleiner 1 sein.

Beispiel 1: $\omega_1 = 1$; $d_1 = 0,3$; $F_{1,1} = 0,3$; $F_{1,2} = 0,124$;
 $\omega_2 = 1,5$; $d_2 = 0,2$; $F_{2,1} = 0,105$; $F_{2,2} = 0,5$;
 $\xi = 1$; $\vartheta_1 = 1,414$; $\vartheta_2 = 1,414$ $\rightarrow \|g\|_2^0 = 0,599$.

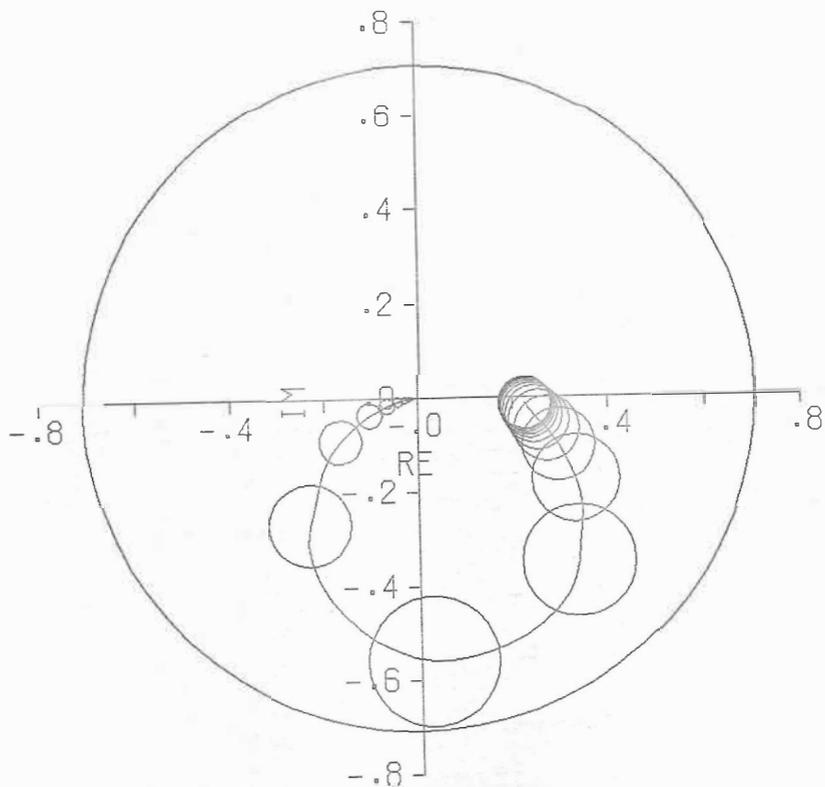
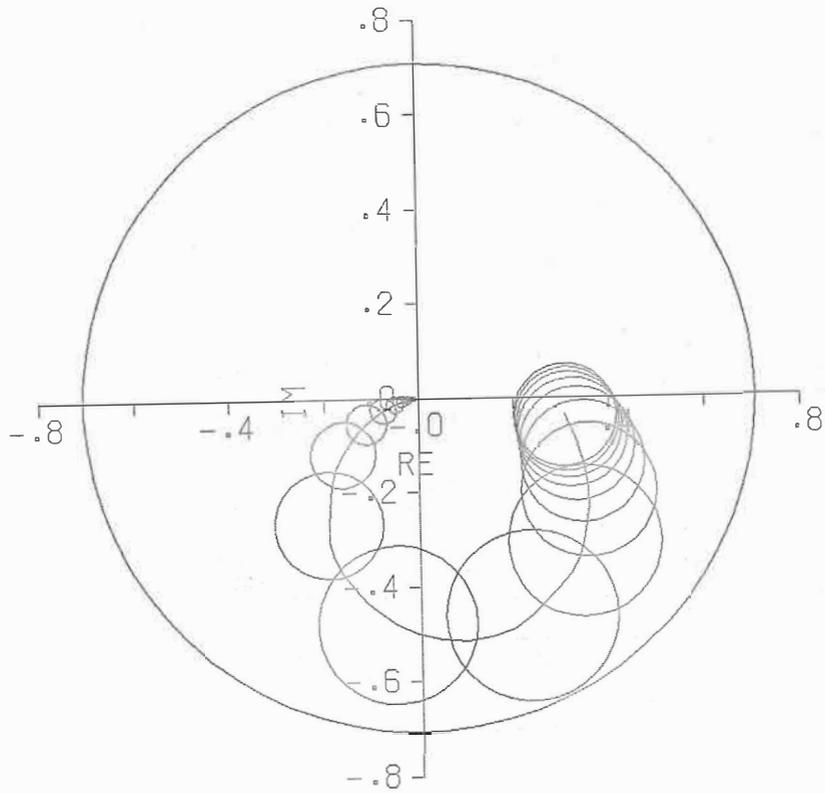


Bild 19a.

Beispiel 2: $\omega_1 = 1$; $d_1 = 0,3$; $F_{11} = 0,3$; $F_{12} = 0,124$;
 $\omega_2 = 1,5$; $d_2 = 0,2$; $F_{21} = 0,105$; $F_{22} = 0,5$;
 $\varepsilon = 1$; $\vartheta_1 = 1,414$; $\vartheta_2 = 1,414$ $\rightarrow \|g\|_2^0 = 0,599$.

Gleiche Werte wie in Beispiel 1, die Zeichnungen zeigen jedoch abweichend (3.133) nicht die Spalten- sondern die Zeilensummen von $\underline{G}(j\omega)$. Es ergibt sich ein etwas besserer Stabilitätsbereich (die Gerschgorinkreise berühren noch nicht den äußeren Kreis).

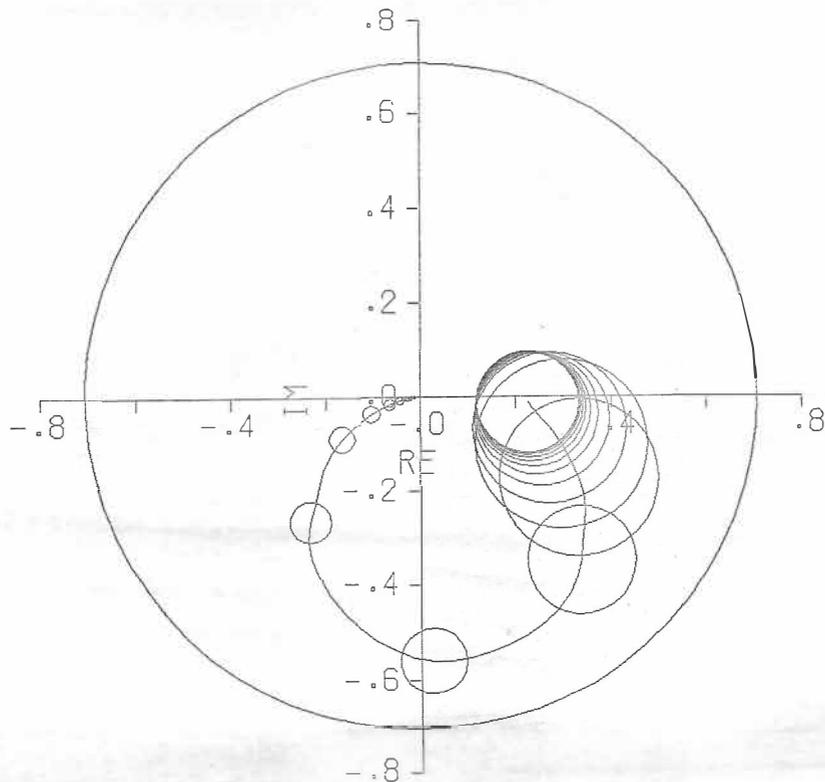
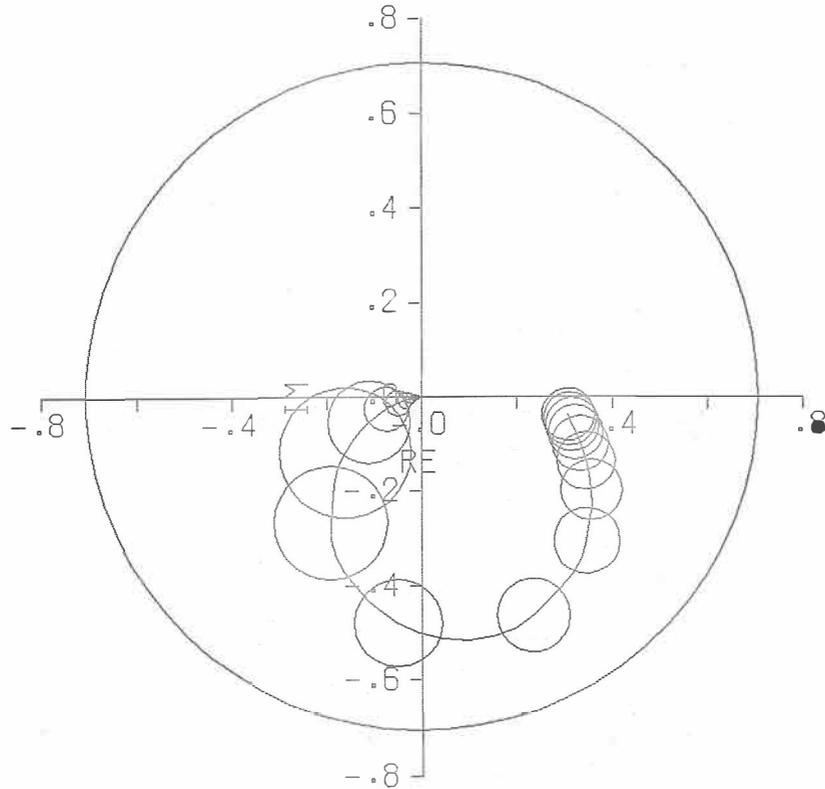


Bild 19b.

Beispiel 3: $\omega_1 = 1$; $d_1 = 0,3$; $F_{11} = 0,35$; $F_{12} = 0,0236$;
 $\omega_2 = 1,5$; $d_2 = 0,2$; $F_{21} = 0,0546$; $F_{22} = 0,6$;
 $\varepsilon = 1$; $\vartheta_1 = 1,414$; $\vartheta_2 = 1,414$ $\rightarrow \|g\|_2^0 = 0,683$.

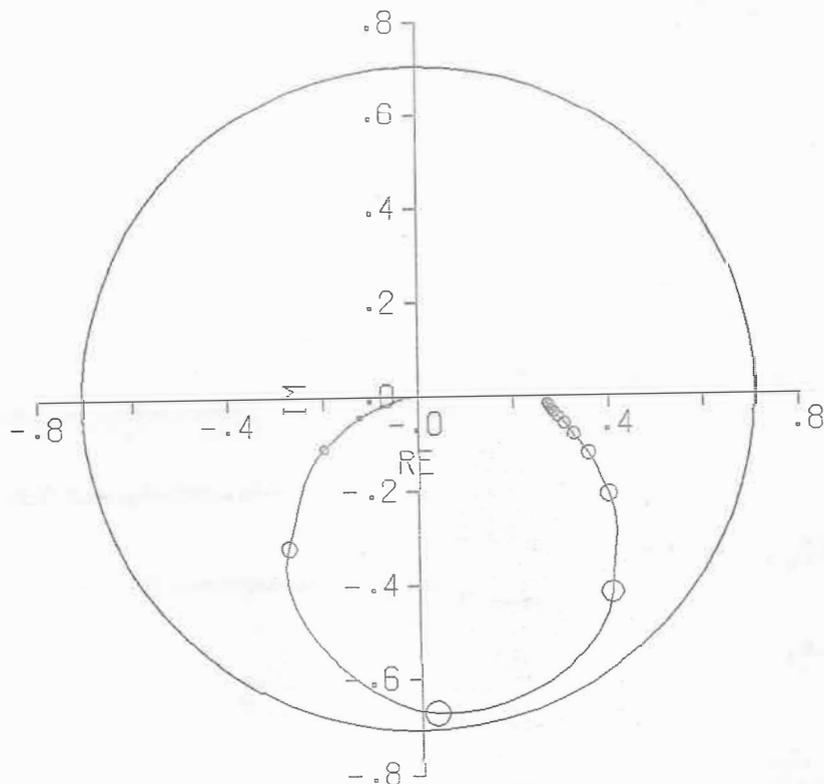
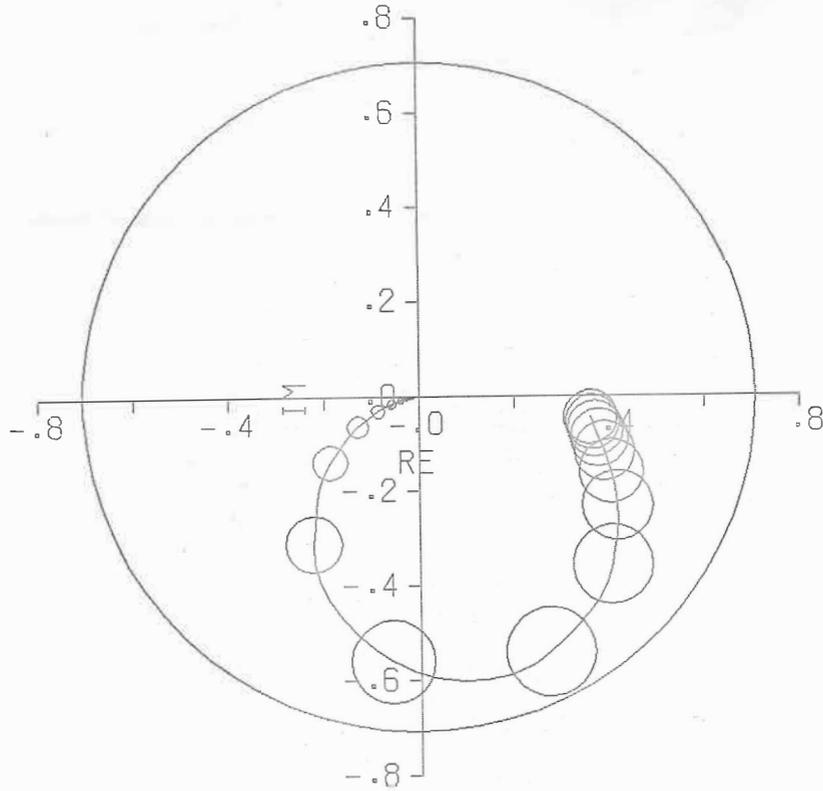


Bild 19c.

Beispiel 4: $\omega_1 = 1$; $d_1 = 0,3$; $F_{11} = 0,2$; $F_{12} = 0,224$;
 $\omega_2 = 1,5$; $d_2 = 0,2$; $F_{21} = 0,205$; $F_{22} = 0,4$;
 $\varepsilon = 1$; $\vartheta_1 = 1,414$; $\vartheta_2 = 1,414$ $\rightarrow \|g\|_2^0 = 0,582$.

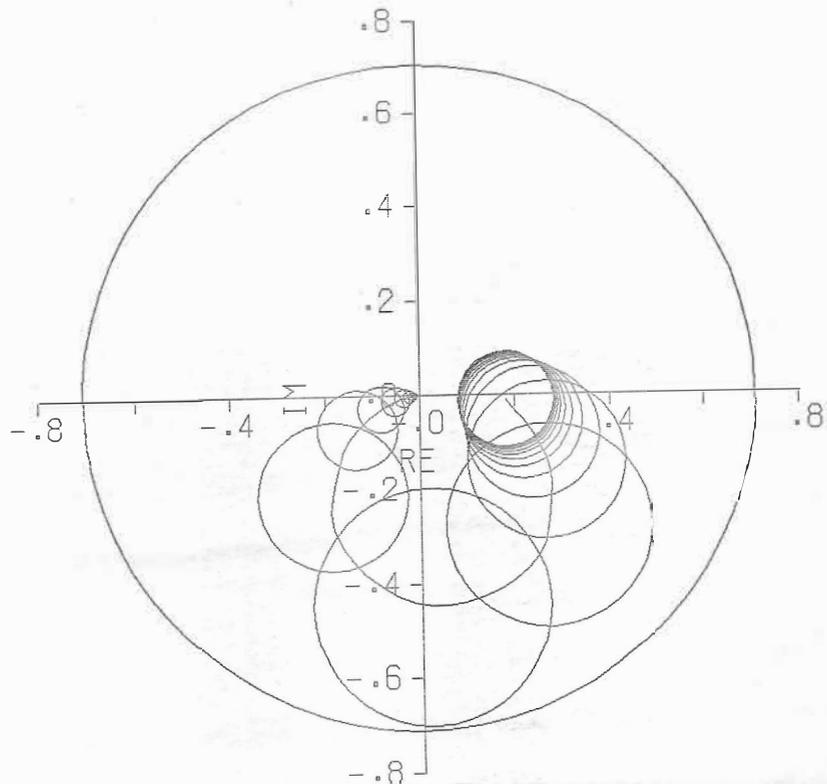
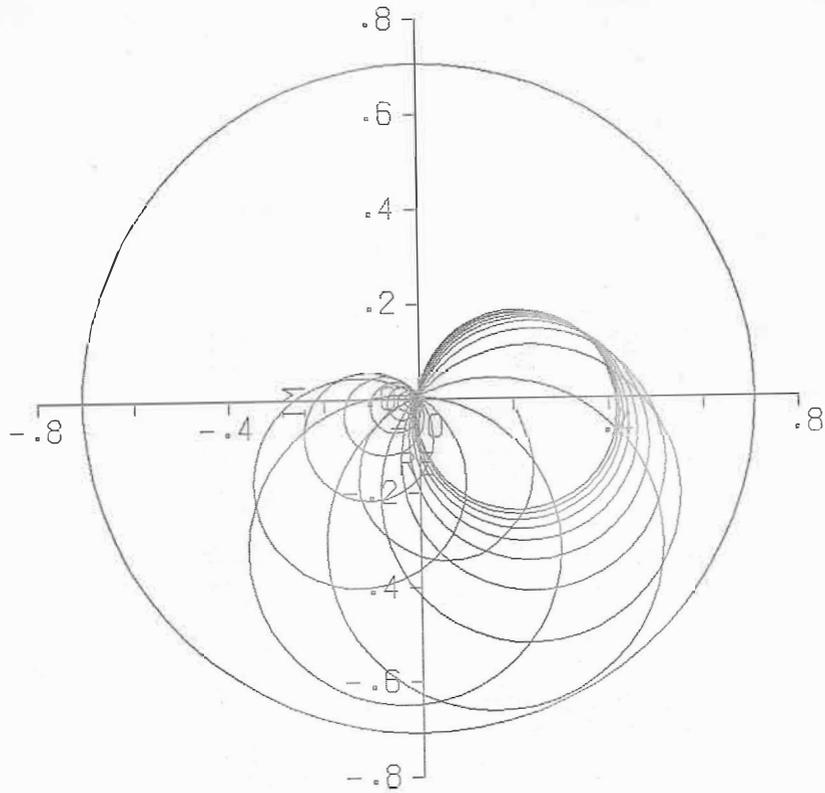


Bild 19d.

Beispiel 5: $\omega_1 = 1$; $d_1 = 1$; $F_{11} = 0,5$; $F_{12} = 1,091$;
 $\omega_2 = 1,5$; $d_2 = 1$; $F_{21} = 0,207$; $F_{22} = 0,5$;
 $\varepsilon = 1$; $\vartheta_1 = 1,414$; $\vartheta_2 = 1,414$ $\rightarrow \|g\|_2^0 = 0,737$.

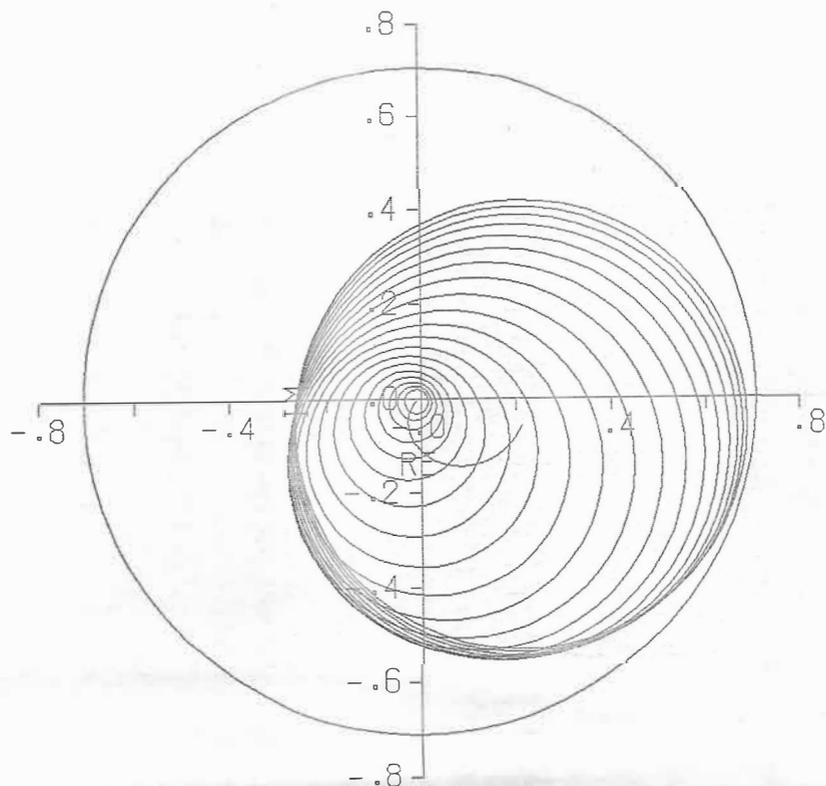
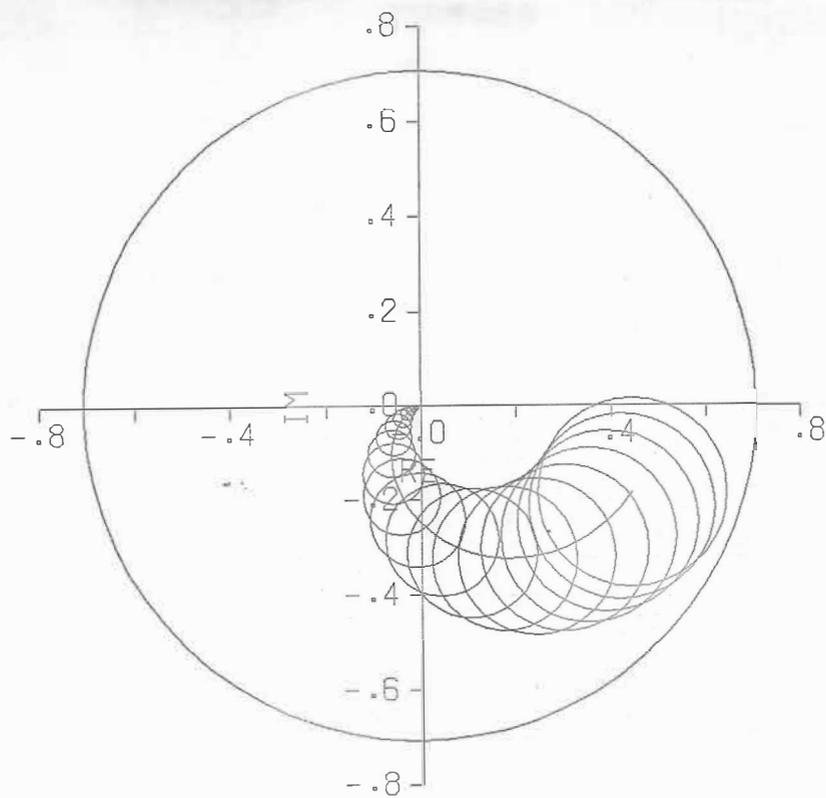


Bild 19e.

Beispiel 6: $\omega_1 = 1$; $d_1 = 0,3$; $F_{11} = 0,5$; $F_{12} = 0,0673$;
 $\omega_2 = 1,5$; $d_2 = 0,2$; $F_{21} = 0,0203$; $F_{22} = 0,3$;
 $\xi = 1$; $\vartheta_1 = 1,1$; $\vartheta_2 = 2,401$ $\rightarrow \|g\|_2^0 = 0,876$.

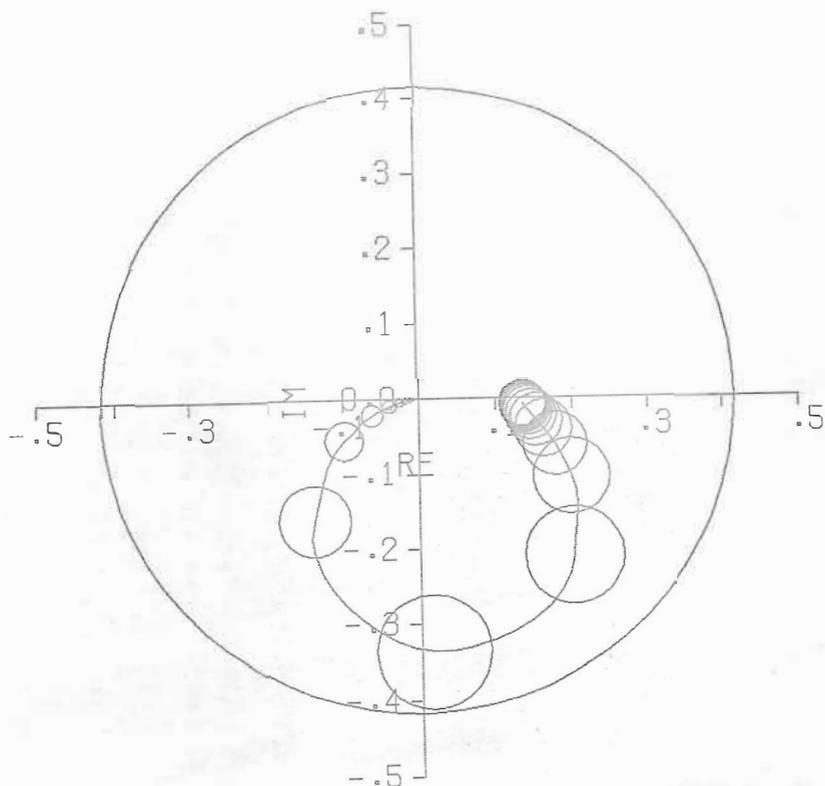
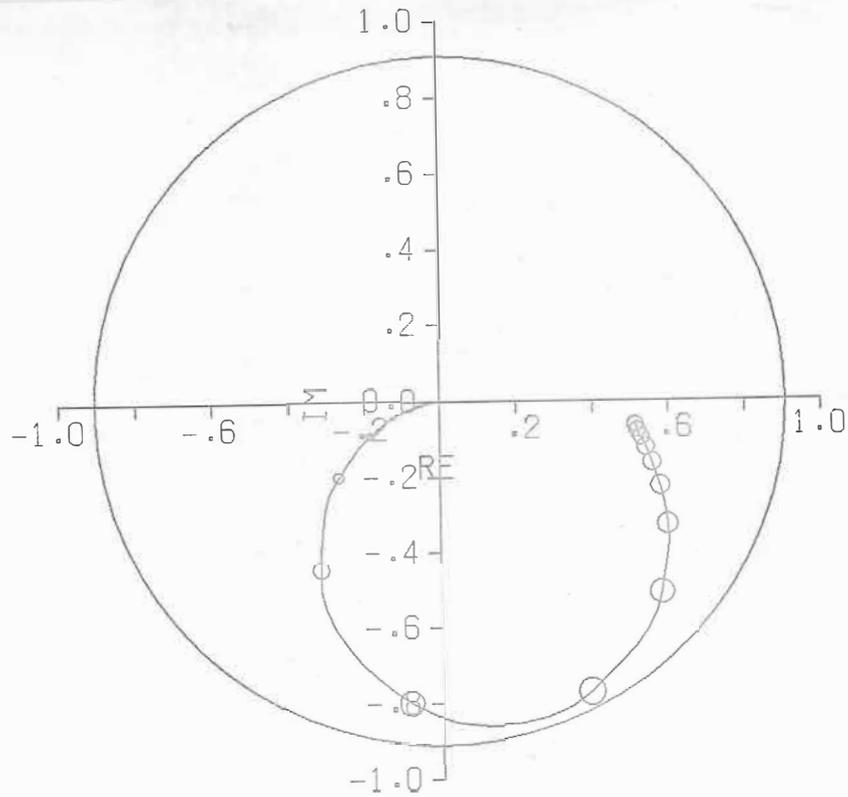


Bild 19f.

3.4 EINE ABSCHÄTZUNG VON GERSCHGORINBÄNDERN

Da das Zeichnen von Gerschgorinkreisen in Abhängigkeit eines Parameters („Gerschgorinband“) von Hand schon bei Matrizen kleiner Ordnung viel Mühe macht, wäre es wünschenswert, eine einfachere Alternative zu schaffen.

Es soll hier versucht werden, die Ortskurvenebene zu verlassen und zu einer Übertragung der Gerschgorinbänder in die Frequenzkennliniendarstellung zu gelangen.

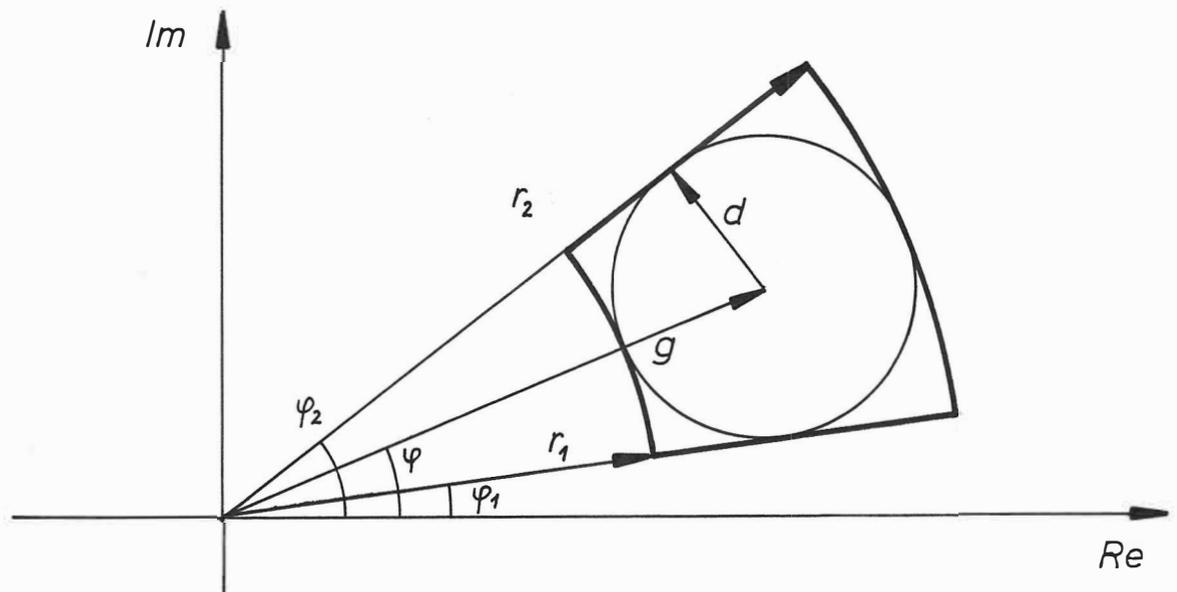


Bild 20a.

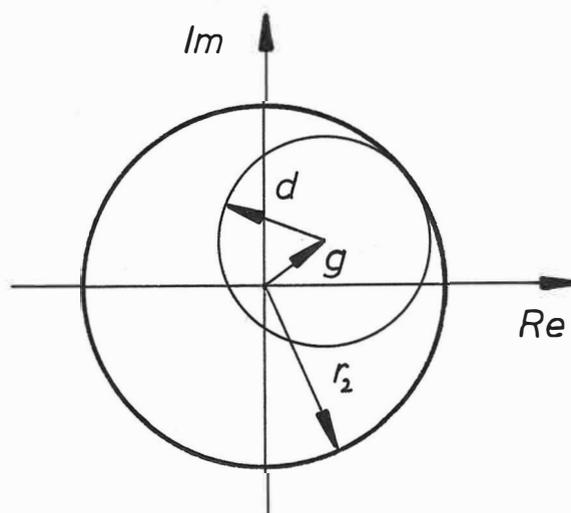


Bild 20b.

Wie in Bild 20a dargestellt ist, grenzen wir den Kreis mit Mittelpunkt g und Radius d durch ein „Viereck“ in der komplexen Ebene ein. Es ist auch der in Bild 20b dargestellte Fall möglich, wenn $d > g$ ist. Dann entartet das eingrenzende „Viereck“ zu einem Kreis.

Definieren wir

$$r := |g| \quad , \quad (3.139)$$

$$\varphi := \arg(g) \quad , \quad (3.140)$$

$$h := \frac{d}{r} \quad , \quad (3.141)$$

so kennzeichnet $h \leq 1$ das Bild 20a und $h > 1$ das Bild 20b.

Für die das Viereck beschreibenden Größen $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ gilt ($h \leq 1$):

$$r_1 = r - d = (1 - h) r \quad , \quad (3.142a)$$

$$r_2 = r + d = (1 + h) r \quad , \quad (3.142b)$$

$$\varphi_1 = \varphi - \Delta\varphi \quad , \quad (3.143a)$$

$$\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi \quad , \quad (3.143b)$$

$$\text{wobei} \quad \Delta\varphi := \arcsin \frac{d}{r} = \arcsin h \quad , \quad (3.144)$$

wie man in Bild 20a ablesen kann.

Für $h > 1$ ergibt sich als einzige abschätzende Größe r_2 wie in (3.142b).

Hängt jetzt der Kreis mit Mittelpunkt g und Radius d von einem Parameter ab ($g(s), d(s)$), so entsteht ein Gerschgorinband.

Die jeden einzelnen Gerschgorinkreis einschreibenden Vierecke, die nun auch von dem Parameter abhängen, lassen sich gut in die Frequenzkennliniendarstellung übertragen. Der Betrag und der Winkel von $g(s)$ sind entsprechend (3.142a), (3.142b), (3.143a), (3.143b) nach oben und unten zu korrigieren, so daß im Betrags- und Winkeldiagramm jeweils ein Band entsteht. Ist wie gewöhnlich der Betrag logarithmisch aufgetragen, so schreiben wir statt (3.142a), (3.142b) besser

$$\text{dB}(r_1) = \text{dB}(1-h) + \text{dB}(r) \quad , \quad (3.145a)$$

$$\text{dB}(r_2) = \text{dB}(1+h) + \text{dB}(r) \quad . \quad (3.145b)$$

Es ist $\text{dB}(x) := 20 \lg x$ der dekadische Logarithmus.

Zur schnellen Bestimmung der Korrekturwerte $\text{dB}(1-h)$, $\text{dB}(1+h)$, $\pm\Delta\varphi$ würde sich eine Schablone nach Bild 21 eignen: Die Beträge $|g(s)|$ und $d(s)$ müssen in ein Diagramm gezeichnet werden. Darunter wird dann $\arg(g(s))$ gezeichnet. Dabei sind die Maßstäbe wie in Bild 21 einzuhalten.

Konstruieren wir die Werte $r_1(s)$, $r_2(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ für ein festes s : Die Schablone wird so gelegt, daß die mit $|g|$ und d bezeichneten Kurven die Punkte $|g(s)|$ und $d(s)$ schneiden. In dieser Stellung lassen sich $r_1(s)$ und $r_2(s)$ an der Schablone markieren. Danach wird die Schablone ohne seitliches Verrücken vertikal verschoben bis die mit φ bezeichnete Kurve der Schablone den Punkt $\arg(g(s))$ des Winkeldiagramms schneidet. Dann markiert man $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$.

Als Beispiel nehmen wir die Übertragungsmatrix (3.130) (S. 108, Mathieusche Differentialgleichung) mit den Werten von S. 111 (Beispiel 2). Durch die Konstruktion mit der Schablone nach Bild 21 entstehen im Betrags- und Winkeldiagramm Bänder (Bild 22a und 22b), mit denen man dieselben Stabilitätsaussagen treffen kann, wie im Fall eines Eingrößensystems. In diesem Beispiel

hätte es ausgereicht, die obere Begrenzung r_2 in den Betragsdiagrammen zu konstruieren, da diese nach S. 111 kleiner als $\frac{1}{1,414}$ sein muß. Dies ist durch die gestrichelte Linie in Bild 22a und 22b angedeutet.

Um das Aussehen der „Betrags- und Winkelbänder“ zu veranschaulichen, wurden die Diagramme jedoch vollständig gezeichnet.

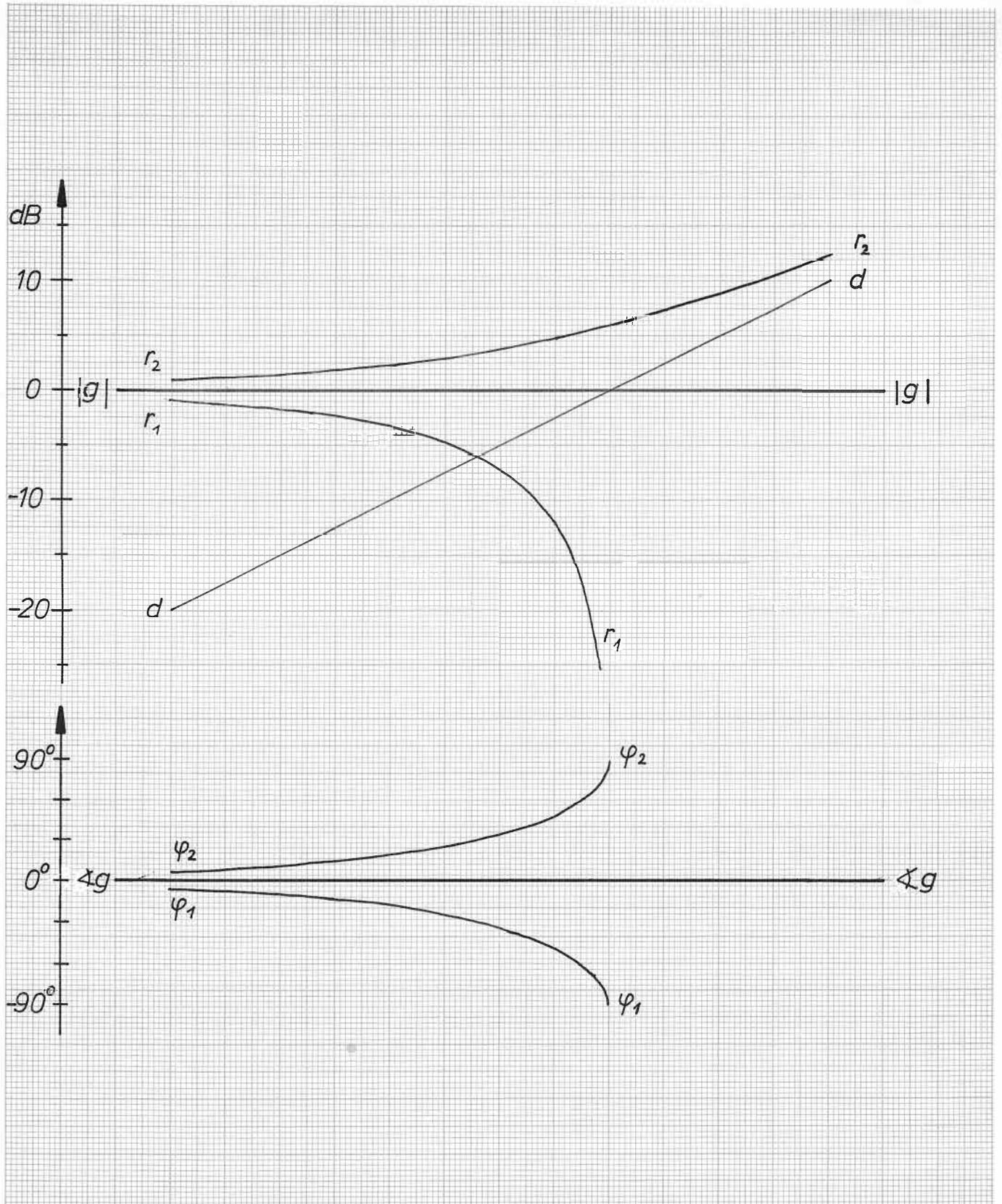


Bild 21.

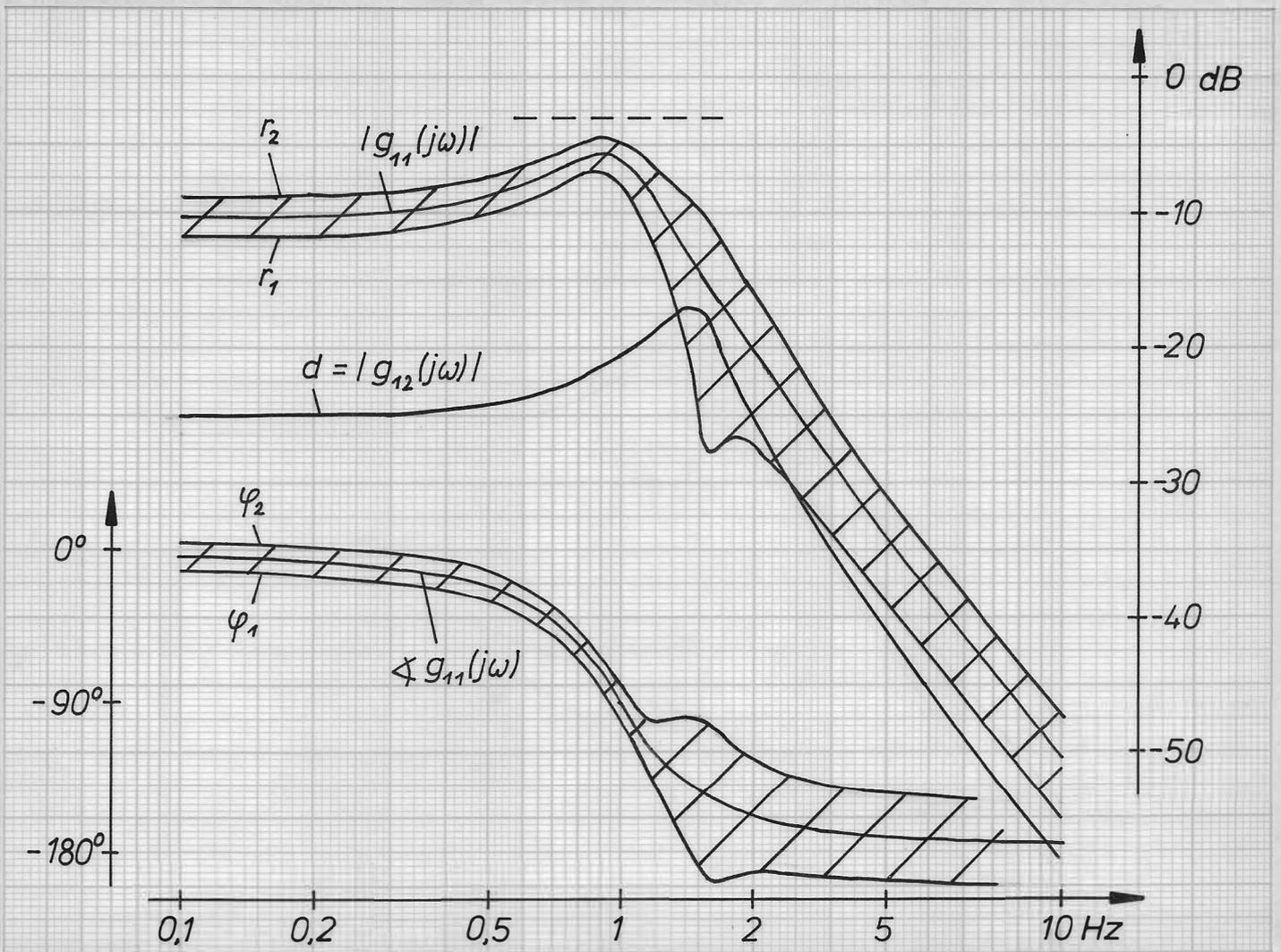


Bild 22a.

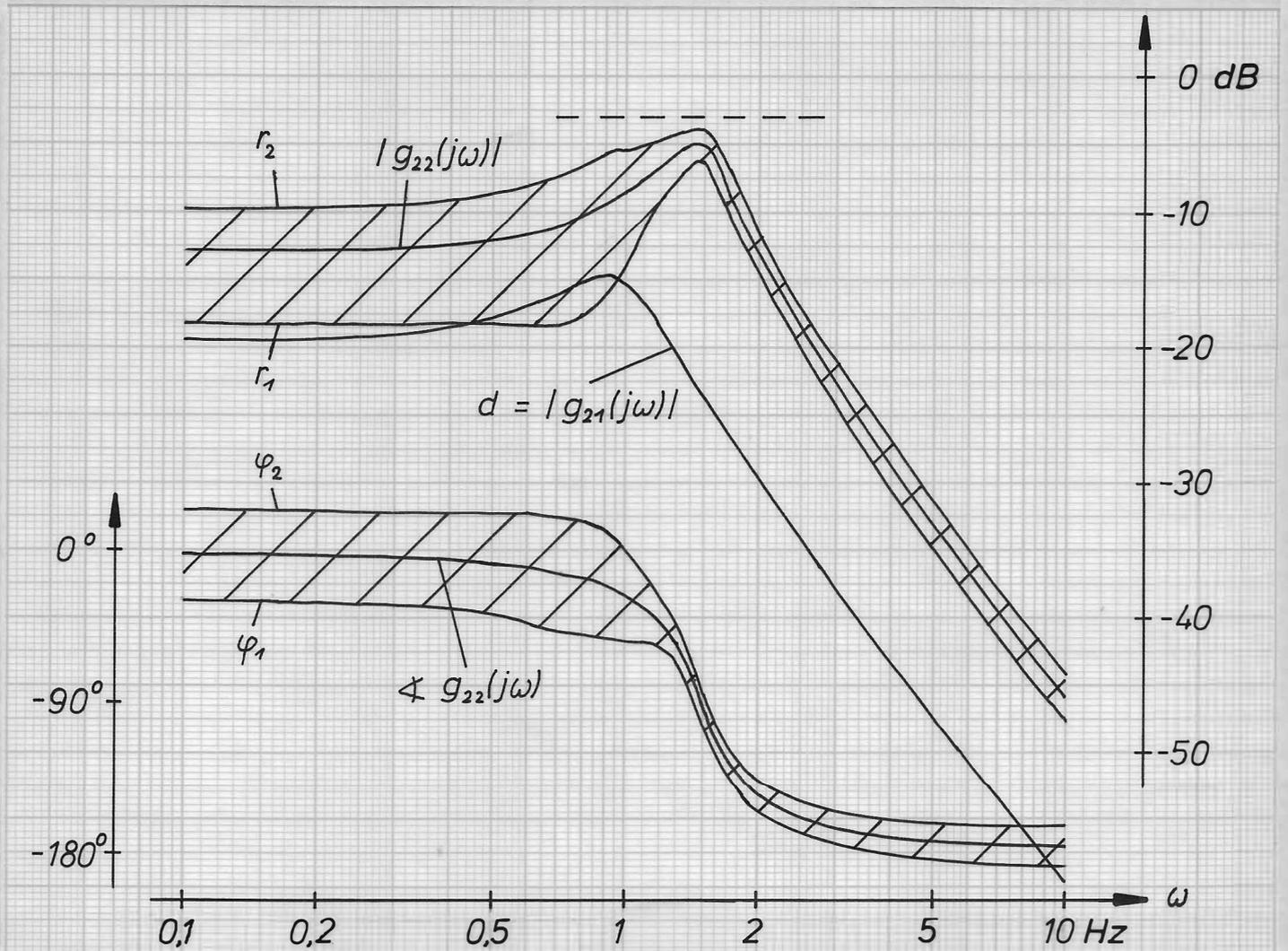


Bild 22b.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] I.N. Bronstein - K.A. Semendjajew:
Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 19. Aufl.,
1980.
- [2] I.N. Bronstein - K.A. Semendjajew:
Ergänzende Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 19. Aufl.,
1980.
- [3] L. Collatz:
Differentialgleichungen.
B.G. Teubner, Stuttgart, 5. Aufl., 1973.
- [4] L. Collatz:
Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.,
Leipzig, 2. Aufl., 1963.
- [5] P.A. Cook:
Modified Circle Theorems.
Recent Mathematical Developments in Control, Bath 1972,
D.J. Bell, Academic Press, London and New York, 1973,
S. 367-372. (vgl. [13])
- [6] D. Dreyer:
Die Analyse nichtlinearer zeitveränderlicher Regelungssysteme mit Hilfe verallgemeinerter Wurzelortskurven.
Dissertation TU Berlin, 1972.

- [7] O. Föllinger:
Laplace- und Fouriertransformation.
Elitera, Berlin, 1977.
- [8] O. Föllinger:
Regelungstechnik.
Elitera, Berlin, Frankfurt/Main, 3. Aufl., 1979.
- [9] H. Gaißer:
Syntheseverfahren von Mehrgrößensystemen.
Diplomarbeit TU Berlin, 1973.
- [10] S. Gerschgorin:
Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix.
Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe
des sciences mathématiques et naturelles, 1931, S. 749-754.
- [11] A. Kneschke:
Differentialgleichungen und Randwertprobleme I - III.
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, Bd.I: 2. Aufl.,
1960, Bd.II: 2. Aufl., 1961, Bd.III: 1961.
- [12] R. v. Mises:
Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes.
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,
Bd. 4, S. 435-436.
- [13] H.H. Rosenbrock:
Multivariable Circle Theorems.
Recent Mathematical Developments in Control, Bath 1972,
D.J. Bell, Academic Press, London and New York, 1973,
S. 345-365. (vgl. [5])

- [14] H.H. Rosenbrock:
State-space and Multivariable Theory.
Thomas Nelson And Sons Ltd, London, 1970.
- [15] W. Roth:
Instabilität durchströmter Rohre.
Ingenieur Archiv, Jahrgang 33 (1964), S. 236-263.
- [16] I. Szabó: Höhere Technische Mechanik
Höhere Technische Mechanik.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, korrigierter
Nachdruck der 5. Aufl., 1977.
- [17] F. Weidenhammer:
Resonanzlösung inhomogener Mathieuscher Systeme.
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,
Bd. 32 (1952), S. 154-156.
- [18] G. Zames - R.R. Kallman:
On Spectral Mappings, Higher Order Circle Criteria and
Periodically Varying Systems.
IEEE Transaction on Automatic Control, 1970, S. 649-652.
- [19] R. Zurmühl:
Matrizen und ihre technischen Anwendungen.
Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 4. Aufl.,
1964.
- [20] R. Zurmühl:
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 5. Aufl.,
1965.