

Visualisierung tomografischer Daten aus Schlierenabbildungen mittels 3D Gaussian Splatting

Tim Hetkämper¹, Tom Nellius¹, Leander Claes¹, Bernd Henning¹

¹Elektrische Messtechnik, Universität Paderborn, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Deutschland

Kurzfassung

Die Schlierentechnik ist eine etablierte Methode zur Visualisierung lokaler Dichteänderungen in optisch transparenten Medien. Ein Einsatzgebiet ist die Darstellung von Schallfeldern, beispielsweise um die Interaktion von Ultraschallwellen mit Objekten zu erfassen oder um die Abstrahlcharakteristik von Schallwandlern zu visualisieren. Durch eine Rotation des räumlichen Schallfeldes eignet sich die Schlierentechnik auch zur Aufnahme von Abbildungen für tomografische Verfahren. Bei der dreidimensionalen Darstellung von Tomografiedaten kommen häufig klassische Segmentierungsverfahren zum Einsatz, welche beispielsweise Daten erst ab einem gewissen Schwellwert anzeigen. Tomografische Daten von Schallfeldern sind allerdings im Wertebereich kontinuierlich, sodass bei einer Schwellwertdarstellung Informationen verloren gehen. Kürzlich wurde ein neuartiges Verfahren zur Darstellung von räumlichen Objekten vorgestellt, welches die Daten mittels im Ort verteilter, teiltransparenter Gauß-Funktionen repräsentiert, sogenannten „Gaussian Splats“. Dieses Verfahren ist in der Anzeige deutlich performanter als das Rendern von einzelnen Voxeln. Ursprünglich wurde dieses Verfahren entwickelt, um aus mehreren Fotos einer realen Umgebung eine dreidimensionale Ansicht erstellen zu können. In diesem Beitrag wird evaluiert, inwiefern sich das Darstellungsverfahren auch zur Visualisierung von Tomografie-Messdaten eignet. Um die Daten darstellen zu können, werden aus vorliegenden Tomografiedaten die Parameter örtlich verteilter Gauß-Funktionen ermittelt, wobei die Intensität als (inverse) Transparenz und das Vorzeichen als Farbe enkodiert wird. Im Vergleich zu einem klassischen 3D-Datensatz, welcher für jeden Voxel einen Wert enthält, werden Gauß-Funktionen nur an den Positionen gespeichert, an dem sich Objekte befinden. Das bedeutet, dass der Speicherbedarf reduziert werden kann. Außerdem lässt sich durch Teiltransparenz eine realitätsgetreuere Darstellung der im Wertebereich kontinuierlichen Schallfeldgeometrie erreichen.

Keywords: Tomografie, 3D Gaussian Splatting, Schlierentechnik, Fraktionale Fourier-Transformation

Einleitung

Tomografische Verfahren ermöglichen es, einen Einblick in dreidimensionale Strukturen zu erlangen, die sonst nur in ihrer Projektion sichtbar sind. Ein bekannter Anwendungsbereich ist die Medizin, beispielsweise die sogenannte Computertomographie (CT) sowie die Magnetresonanztomographie (MRT). Aber auch in anderen Bereichen kommen tomografische Verfahren zum Einsatz. So kann zum Beispiel aus mithilfe eines Messaufbaus (s. Abbildung 1) aufgezeichneten Schlierenabbildungen in Kombination mit einem tomografischen Verfahren eine 3D-Rekonstruktion eines Schallfeldes erstellt werden. Dies erlaubt beispielsweise die Untersuchung der Abstrahlcharakteristik von Schallwandlern. Hier ist es nicht nur interessant, Schnittbilder des rekonstruierten Schallfeldes darzustellen, sondern auch eine dreidimensionale Darstellung zu erzeugen. Allerdings ist es nur mittels besonderer Hardware, wie beispielsweise Holografie-Displays, möglich, dreidi-

mensionale Modelle als „echte“ dreidimensionale Objekte darzustellen. Daher werden die Modelle üblicherweise auf zwei Dimensionen reduziert, wobei allerdings die Interpretation durch Mehrdeutigkeiten erschwert werden kann. Besteht die Möglichkeit für den Betrachter, selbst durch einen dreidimensionalen Datensatz zu navigieren und das Modell aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten, können diese Mehrdeutigkeiten aufgelöst werden. Ein Nachteil ist allerdings, dass für die Darstellung eines klassischen Tomografie-Datensatzes Millionen von Voxeln gerendert werden müssen, was neben dem Speicherbedarf auch leistungsfähige Hardware erfordert. Ein neues Verfahren, welches die effiziente Visualisierung von dreidimensionalen Daten ermöglicht, ist das sogenannte „3D Gaussian Splatting“ [1]. Die Darstellung als „Gaussian Splats“ wird im Folgenden benutzt, um tomografische Daten aus Schlierenabbildungen zu visualisieren.

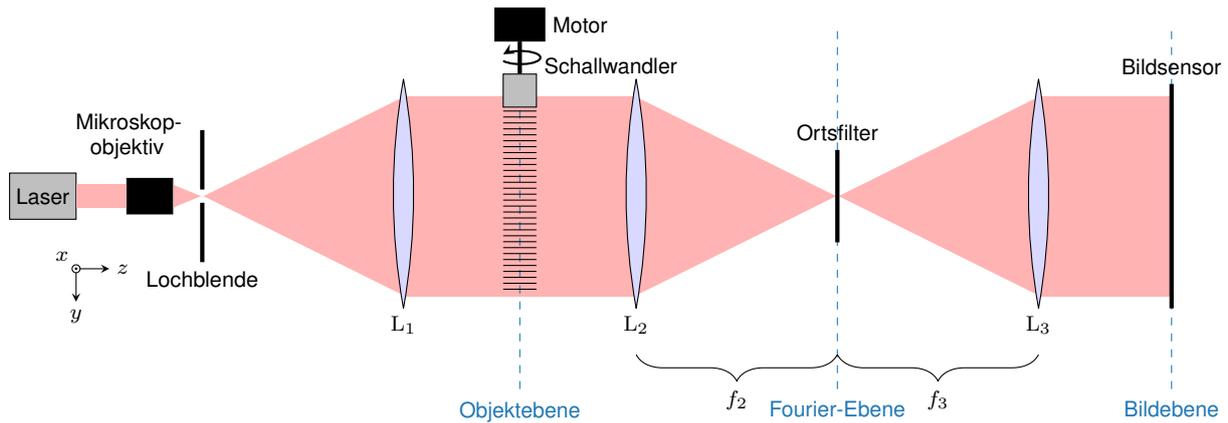


Abb. 1: Schematischer Messaufbau zur Aufzeichnung von Schlierenabbildungen (nicht maßstabsgetreu).

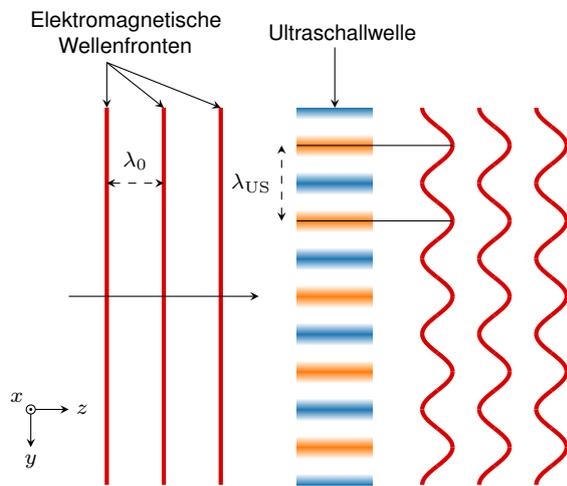


Abb. 2: Interaktion einer elektromagnetischen Welle mit einer orthogonal zur Ausbreitungsrichtung ausgesandten Ultraschallwelle.

Schlierentechnik

Die Schlierentechnik ermöglicht die Visualisierung von lokalen Dichteänderungen in optisch transparenten Medien. Damit ist auch die Visualisierung von Schallwellen möglich. Die Schlierentechnik nutzt die Interaktion einer elektromagnetischen Welle mit einer Ultraschallwelle aus. Eine Ultraschallwelle verursacht eine lokale Änderung des Schallwechseldrucks. Dadurch ändert sich auch die Dichte sowie der Brechungsindex im Ausbreitungsmedium. Dieser Zusammenhang wird über den piezooptischen Koeffizienten beschrieben [2]. Wird die Schallwelle, wie in Abbildung 2 dargestellt, von einer ebenen, elektromagnetischen Welle beleuchtet, treten Phasenverschiebungen in den elektromagnetischen Wellenfronten auf [3]. Diese Phasenverschiebungen sind allerdings nicht unmittelbar beobachtbar.

Das menschliche Auge und Bildsensoren wie sie zum Beispiel in Digitalkameras verbaut sind, registrieren die Intensität des elektrischen Feldes, welche gegeben ist durch

$$I(x, y) = |E(x, y)|^2 . \quad (1)$$

Daher wird ein Messaufbau benötigt, um diese Phasenverschiebungen sichtbar zu machen. Abbildung 1 zeigt einen solchen Aufbau zur Aufnahme von Schlierenabbildungen. Laserstrahlung der Wellenlänge $\lambda_0 = 662 \text{ nm}$ wird von einem Mikroskopobjektiv aufgeweitet. Die Linse L_1 kollimiert die Strahlung, sodass die sogenannte Objektebene homogen beleuchtet wird. In der Objektebene ist ein Schallwandler in einem mit Wasser gefüllten Becken (in der Abbildung nicht dargestellt) positioniert. Auf der optischen Achse hinter dem Becken befindet sich die Linse L_2 . Im Abstand ihrer Brennweite f_2 liegt die sogenannte Fourier-Ebene, in der die zweidimensionale Fourier-Transformation der Abbildung in der Objektebene beobachtet werden kann. In klassischen Aufbauten ist die Linse L_3 im Abstand ihrer Brennweite f_3 zur Fourier-Ebene positioniert. Dadurch wird die Fourier-Transformierte erneut transformiert, sodass sich wieder ein Bild ergibt. Klassischerweise wird in der Fourier-Ebene ein optisches Filter platziert, welches es durch die Manipulation des Ortsfrequenzbereiches ermöglicht, die Phasenverschiebungen sichtbar zu machen [4]. Der Einsatz optischer Filter geht jedoch je nach Wahl des Filters mit einem Verlust an Informationen in der Abbildung einher, zum Beispiel des Vorzeichens der Dichteänderung. Allerdings ist es auch möglich, auf das Ortsfilter zu verzichten, wenn die Position der Linse L_3 leicht variiert wird. Damit entspricht der Abstand nicht mehr der zur Durchführung einer vollständigen Fourier-Transformation benötigten Entfernung; zur Beschreibung kann die fraktionale Fourier-Transformation herangezogen werden [5].

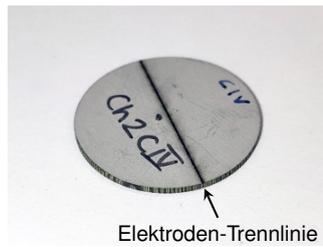


Abb. 3: Aktives Element des untersuchten Schallwandlers mit aufgetrennter Elektrode.

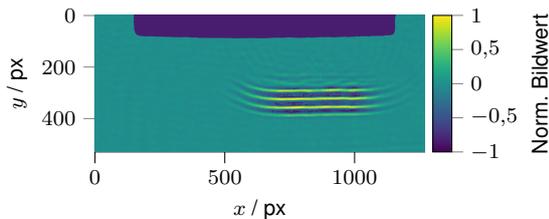


Abb. 4: Rekonstruierte Abbildung mit Vorzeicheninformation der ausgesandten Ultraschallwelle.

Die Linse L_3 entspricht im Messaufbau dem Objektiv einer Kamera, sodass eine Verschiebung der Linse durch ein Verstellen des Fokus erreicht werden kann. Dadurch können direkt Abbildungen mit Vorzeicheninformation der Ultraschallwelle aufgezeichnet werden [5]. Die aufgezeichnete Abbildung P_{US} ist allerdings noch von der Hintergrundhelligkeit überlagert. Daher wird eine zweite Abbildung P_{ref} ohne Ultraschallwelle aufgenommen. Anschließend kann eine Referenzierung gemäß

$$P_{\text{frak}} = \sqrt{P_{US}} - \sqrt{P_{ref}} \quad (2)$$

durchgeführt werden, welche auch die Quadrierung durch die Aufzeichnung der Intensität rückgängig macht.

Im Folgenden wird das Schallfeld eines Wandlers untersucht, welcher zur Untersuchung von Scherkomponenten bei der Materialcharakterisierung entwickelt wurde [6]. Dazu ist die Elektrode des scheibenförmigen aktiven Elements mittig aufgetrennt, wie in Abbildung 3 gezeigt. Eine Schlierenabbildung des Schallfeldes ist in Abbildung 4 dargestellt. Der Schallwandler ist am oberen Bildrand in dunkelblau eingefärbt. Es ist zu erkennen, dass die Abstrahlung nicht vollflächig erfolgt. Das Ultraschall-Sendesignal ist ein Burst mit drei Sinus-Perioden und einer Frequenz von 1,6 MHz. Dies entspricht der Serienresonanzfrequenz des Schallwandlers. Daher ist ein mechanisches Nachschwingen des Schallwandlers durch zusätzlich abgestrahlte Schallwellen zu erkennen. Außerdem muss der Schallwandler zunächst einschwingen, weshalb die erste ausgesandte Periode eine geringere Intensität aufweist.

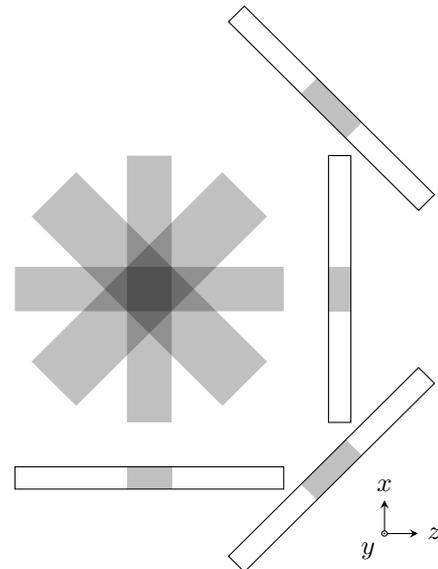


Abb. 5: Einfache Rückprojektion eines Quadrates. Die aufgezeichneten eindimensionalen Projektionen sind unter ihrem jeweiligen Aufnahmewinkel als breite Balken dargestellt.

Tomografie

Zur Anwendung von tomografischen Verfahren wird ein zu untersuchendes Objekt zunächst aus verschiedenen Winkeln durchleuchtet und die Projektion aufgezeichnet. Nachfolgend wird beispielhaft der zweidimensionale Fall eines für die Strahlung undurchlässigen Quadrates betrachtet. Durch die Vorwärtsprojektion ergibt sich eine eindimensionale Linie, wobei die Mitte der Linie auf der Länge der Diagonalen des Quadrates abgeschattet wird. Um aus den aufgezeichneten Projektionen wieder eine zweidimensionale Abbildung zu erhalten, kann jede Projektion unter dem zur Aufnahme benutzten Winkel in die Abbildungsfläche zurückprojiziert werden. Diese sogenannte einfache Rückprojektion ist in Abbildung 5 dargestellt. Da sich alle Projektionen additiv überlagern, entsteht eine unscharfe Darstellung des Quadrates. Statt der einfachen Rückprojektion wird daher die sogenannte gefilterte Rückprojektion (filtered backprojection) benutzt, bei welcher die Projektionen zunächst gefiltert und erst dann rückprojiziert werden [7]. Diese Methode ist auch auf dreidimensionale Datensätze anwendbar, indem diese als einzelne Schichten betrachtet werden. Dies setzt eine parallele Beleuchtung voraus.

Da bei der Schlierentechnik das zu untersuchende Schallfeld entlang der z -Achse mit parallelisierter Strahlung durchleuchtet wird, ist eine Schlierenabbildung ebenfalls eine Projektion. Aufgrund der Länge des Messaufbaus (ca. 3,8 m) ist es unpraktisch, den Aufbau zu rotieren, weshalb statt-

dessen der Schallwandler gedreht wird. Dazu ist er an einem Schrittmotor montiert, wie in Abbildung 1 dargestellt. Der Schallwandler wird mit einem Winkelinkrement von 2° um insgesamt 180° gedreht und jeweils eine Schlierenabbildung aufgezeichnet. Anschließend wird mithilfe einer Implementierung der gefilterten Rückprojektion [8] ein dreidimensionales Modell berechnet. Der resultierende Datensatz besteht aus einem Quader regelmäßig im Raum verteilter Werte (Voxeln) und ist entsprechend speicherintensiv. So hat ein Datensatz von $635 \times 635 \times 215$ Voxeln, in dem jeder Wert als Gleitkommazahl mit 64 bit gespeichert wird, eine Dateigröße von 661 MiB. [9]

Darstellung mit Gaussian Splatting

„3D Gaussian Splatting“ ist eine Methode zur effizienten Darstellung realistischer dreidimensionaler Umgebungen durch räumlich verteilte, dreidimensionale Gauß-Funktionen, wobei der Wert der Gauß-Funktion in der dargestellten Transparenz enkodiert wird. Die einzelnen Gauß-Funktionen werden dabei neben der Position durch eine Kovarianzmatrix, eine Farbe, sowie Kugelflächenfunktionen (engl. spherical harmonics) zur vom Betrachtungswinkel abhängigen Farbdarstellung parametrisiert. Eine Abbildung mit „3D Gaussian Splatting“ kann direkt aus einer Reihe aufgenommener Fotos oder aus einer Videosequenz generiert werden. In einem zweischrittigen Prozess wird dabei zunächst aus der Bildfolge eine Punktwolke durch Verwendung eines „Structure From Motion“-Algorithmus erzeugt [10]. Diese im Raum verteilten Punkte dienen dann als Startwerte für ein Optimierungsproblem, welches zur Bestimmung der Parameter der räumlich verteilten Gauß-Funktionen auf Grundlage der Bildfolge sowie der durch den „Structure From Motion“-Algorithmus bestimmten Kamerapositionen dient. Dieser Ansatz ist nach aktuellem Stand der Technik sowohl bezüglich der Generierung des Modells, als auch bei der Darstellung, eines der effizientesten Verfahren zur dreidimensionalen Darstellung natürlicher Umgebungen. [1] Es existieren bereits Ansätze „3D Gaussian Splatting“ für die Darstellung tomografisch ermittelter Datensätze einzusetzen [11, 12], wobei hier die typische Zielanwendung im medizinischen Bereich liegt. Im Vergleich mit tomografischen Daten von Schallfeldern zeigt sich hier ein deutlicher, qualitativer Unterschied: Während in medizinischen Anwendungen Übergänge zwischen Medien (zum Beispiel Knochen und Gewebe) möglichst klar abgegrenzt werden sollen, werden bei der Schallfeldtomografie in der Regel kontinuierliche räumliche Verteilungen erwartet. Eine klassische, in medizinischen Anwendungen gängige Darstellung, wie etwa eine Segmentierung auf Basis

von Schwellwerten und eine Darstellung mit Voxel, kann die kontinuierliche Natur eines Schallfeldes deshalb nicht abbilden. Der Einsatz von „3D Gaussian Splatting“ kann hier Abhilfe schaffen, da durch die semitransparente Darstellung der räumlichen Gauß-Funktionen zum Beispiel der kontinuierlich abfallende Schallwechseldruck am Randgebiet eines Wellenpaketes realistischer dargestellt werden kann. Weiterhin kann die Darstellung der Ergebnisse durch die Reduzierung der Datensatzgröße effizienter bezüglich Speicher und Rechenzeit realisiert werden.

Der Einsatz von „Structure From Motion“-Verfahren zur Inferenz dreidimensionaler Datensätze setzt voraus, dass ausreichend Informationen über die Struktur in der zu verarbeitenden Bildfolge vorhanden sind [10]. Im Fall der hier betrachteten Schlierenabbildungen ist dies nicht der Fall. Daher wird der zur Bestimmung der initialen Population von Gauß-Funktionen ein alternativer Ansatz auf Basis der dreidimensionalen Fourier-Transformation der tomografisch rekonstruierten Daten gewählt. Grundlage hierfür ist die Annahme, dass sich ein gegebenes Schallwellenpaket als Resultat eines harmonischen Vorgangs durch eine geringe Anzahl harmonischer Komponenten im Raum darstellen lässt. Die Gauß-Funktionen werden anschließend periodisch im Raum positioniert, sodass sie in guter Näherung dem Verlauf einer harmonischen Funktion mit gegebener Periode entsprechen, zum Beispiel:

$$\sin(u) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}(u-\frac{\pi}{2}-n2\pi)^2)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}(u-\frac{3\pi}{2}-n2\pi)^2)}, \quad (3)$$

wobei die beiden Summen jeweils die positive beziehungsweise die negative Halbwelle des Sinus approximieren. Die näherungsweise Übereinstimmung einer harmonischen Funktion und einer Folge von Gauß-Funktionen lässt sich grafisch zeigen (Abbildung 6). Für die Repräsentation einer harmonischen Komponente muss also jeweils an den Extrema eine Gauß-Funktion mit entsprechendem Vorzeichen positioniert werden.

Um die dominanten harmonischen Komponenten der tomografischen Abbildung zu ermitteln, wird der Datensatz Fourier-transformiert. Im Betrag der Fourier-Transformierten werden nun alle lokalen Maxima bis zu einem vorgegebenen relativen Schwellwert, etwa 0,1, ermittelt. Die Position der Maxima im dreidimensionalen Spektrum der tomografischen Daten gibt Aufschluss über die Richtung und Periode der harmonischen Funktion im Raum. Im Fall der Grundschwingung des abgebildeten Schallwellenpakets entspricht dies gerade der Ausbreitungsrichtung und der Wellen-

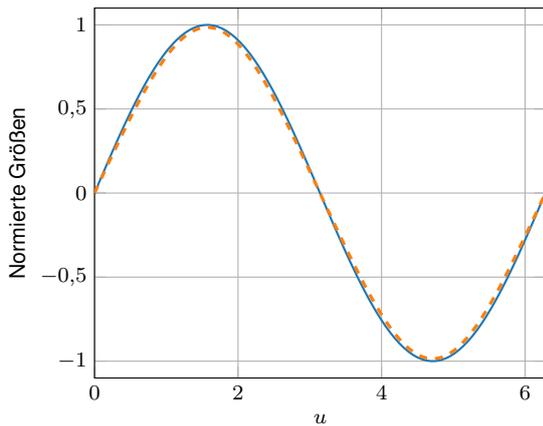


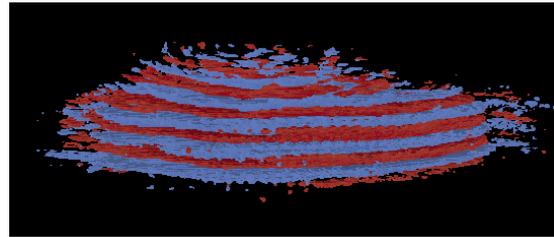
Abb. 6: Approximation einer harmonischen Funktion (—) durch eine Folge überlagerter Gauß-Funktionen (- - -) gemäß Gl. (3).

länge. Aus der Phase des Spektrums wird die Phasenlage der jeweiligen spektralen Komponente abgelesen.

Die vorangegangenen Schritte liefern Informationen darüber, mit welcher Periodizität und in welcher Richtung für die betrachtete spektrale Komponente in den tomografischen Daten lokale Extrema erwartet werden können, zeigt aber nicht, im welchem Bereich sich das Wellenpaket befindet. Um nur im Bereich der Schallwelle Gauß-Funktionen zu positionieren, werden im tomografischen Datensatz auf einem kubischen Gitter die Bildwerte extrahiert, wobei das Gitter eine Kantenlänge entsprechend der halben Periode der spektralen Komponente hat (vergleiche Gleichung 3) und an der ermittelten Ausbreitungsrichtung und Phase ausgerichtet ist. Liegt der Betrag eines Bildwertes auf einem Gitterpunkt oberhalb einer bestimmten relativen Schwelle, etwa 0,01, wird an der Position eine Gauß-Funktion positioniert. Die räumliche Ausdehnung σ (analog zur Standardabweichung in der Stochastik) der Gauß-Funktion wird dabei aus der Periode T der spektralen Komponente zu $\sigma = T/(2\pi)$ ermittelt. Die Transparenz wird invers zum Betrag des ermittelten Bildwerts festgelegt und die Farbe entsprechend dem Vorzeichen. Kovarianzen und die Parameter der Kugelflächenfunktionen werden in dieser Darstellung nicht verwendet und entsprechend zu null gesetzt.

Das beschriebene Vorgehen wird für alle aus der dreidimensionalen Fourier-Transformierten bestimmten spektralen Komponenten mit absteigender Periodenlänge durchgeführt, wobei der tomografische Datensatz vor der Extraktion der Bildwerte bis zur betrachteten Periodenlänge tiefpassgefiltert wird. Nach der Bestimmung der Gauß-Funktionen für eine spektrale Komponente wird diese, durch Subtraktion des tiefpassgefilterten

a: Darstellung als Voxel mit Segmentierung



b: Darstellung mit Gauß-Funktionen

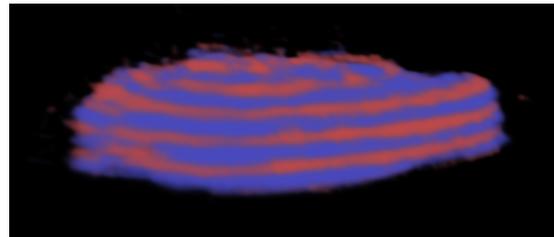


Abb. 7: Vergleich der Darstellung vom tomografischen Daten eines Schallfeldes mittels Voxeln und Segmentierung (a) und mittels räumlich verteilter Gauß-Funktionen (b). Die positive Halbwelle wird rot dargestellt, die negative blau.

Datensatzes von den ungefilterten Daten, entfernt. Es resultieren für den untersuchten Datensatz etwa 50 000 örtlich verteilte Gauß-Funktionen. Damit geht eine Reduktion der Größe des Datensatzes von etwa zwei Größenordnungen einher. Im Vergleich zu den bisher verwendeten Benchmark-Problemen für „3D Gaussian Splatting“ [1] ist die Anzahl der Gauß-Funktionen ebenfalls um eine Größenordnung geringer, was eine effiziente Darstellung, zum Beispiel auf mobiler Hardware, ermöglicht.

Bei der Darstellung von natürlichen Umgebungen mittels „3D Gaussian Splatting“ folgt nach der initialen Bestimmung der Punktwolke ein umfangreicher Optimierungsschritt auf Basis der Bildfolge [1]. Da in dem hier vorgestellten Ansatz die Parameter der im Raum verteilten Gauß-Funktionen bereits auf Basis der Ausgangsdaten bestimmt werden können und die vergleichsweise geringe Anzahl an Gauß-Funktionen schon eine effiziente Darstellung mit ausreichendem Detailgrad ermöglicht, wird hier vorerst auf eine weitere Optimierung verzichtet.

Ein Vergleich mit einer klassischen Darstellung des tomografischen Datensatzes als Voxel mit Segmentierung zeigt deutlich die Unterschiede im Ergebnis. Da die klassische Darstellung (Abbildung 7a) mit Schwellwerten für die positive und negative Halbwelle erstellt wird, ergeben sich klare Abgrenzungen zwischen den Perioden der Schallwellen. Allerdings treten kleinere Artefakte hier deutlich hervor und die kontinuierliche Quali-

tät des akustischen Feldes kann nicht repräsentiert werden. Die Darstellung durch die ermittelten räumlichen Gauß-Funktionen (Abbildung 7b) zeigt eine weniger scharfe Abtrennung zwischen den Halbwellen des Schallfeldes. Eben diese kontinuierlichen Verläufe sind jedoch charakteristisch für ein akustisches Feld. Außerdem führt die Darstellung durch Gauß-Verteilungen zu einer Unterdrückung kleinerer Artefakte aus dem tomografischen Prozess.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Schlierentechnik in Kombination mit tomografischen Verfahren ermöglicht eine dreidimensionale Rekonstruktion von Schallfeldverteilungen. Klassische Visualisierungsmethoden dreidimensionaler Datensätze können den kontinuierlichen Verlauf der akustischen Feldgrößen jedoch nur unzureichend repräsentieren. Es wird daher ein alternativer Ansatz auf Basis räumlicher Gauß-Funktionen („3D Gaussian Splatting“ [1]) untersucht. Die resultierende interaktive Abbildung zeigt sich nicht nur effektiv bezüglich der Speicher- und Rechenressourcen, sondern kann die kontinuierlichen Eigenschaften der untersuchten Schallfeldverteilung gut wiedergeben. Die mit dem hier vorgestellten Ansatz erzeugten Abbildungen haben bezüglich der Anzahl der Gauß-Funktionen noch erhebliches Optimierungspotential, dass auf Grundlage der Optimierungsverfahren in den ursprünglichen Arbeiten [1] in Zukunft ausgenutzt werden soll. In weiteren Arbeiten soll untersucht werden, ob die Erzeugung der Gauß-Funktionen bereits auf Basis der Schlierenabbildungen durchgeführt werden kann, ohne als Zwischenschritt ein klassisches tomografisches Rekonstruktionsverfahren anzuwenden. Besonders aufschlussreich kann eine interaktive, zeitabhängige Darstellung der Schallausbreitung sein. Auch hierfür existieren bereits für natürliche Umgebungen Ansätze auf Basis örtlicher Gauß-Funktionen („4D Gaussian Splatting“ [13]), die für die Visualisierung von Schallfeldern mittels tomografischer Schlierentechnik angepasst werden können.

Literaturnachweis

- [1] B. Kerbl, G. Kopanas, T. Leimkühler und G. Drettakis. „3D Gaussian Splatting for Real-Time Radiance Field Rendering“. In: *ACM Transactions on Graphics* 42.4 (Juli 2023). URL: <https://repo-sam.inria.fr/fungraph/3d-gaussian-splatting/>.
- [2] C. Scruby und L. Drain. *Laser Ultrasonics - Techniques and Applications*. New York: Taylor & Francis, 1990. ISBN: 978-0-7503-0050-6.
- [3] C. V. Raman und N. S. Nagendra Nath. „The diffraction of light by high frequency sound waves: Part I.“ In: *Proceedings of the Indian Academy of Sciences – Section A*. Bd. 2. 4. Springer, 1935, S. 406–412.
- [4] W. Stöbel. *Fourieroptik*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. ISBN: 978-3-662-01619-0. DOI: 10.1007/978-3-662-01618-3.
- [5] T. Hetkämper, K. Koch, L. Claes und B. Henning. „Phase-preserving methods to visualise ultrasonic fields with schlieren imaging“. In: *tm - Technisches Messen* 90.2 (2023), S. 103–112. DOI: 10.1515/teme-2022-0112.
- [6] D. Dreiling, D. Itner u. a. „Application and modelling of ultrasonic transducers using 1-3 piezoelectric composites with structured electrodes“. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2021*. Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA), 2021.
- [7] T. M. Buzug. *Computed tomography*. Berlin, Germany: Springer, Nov. 2010.
- [8] P. Müller. *radontea: Python algorithms for the inversion of the Radon transform (Version 0.4.14) [Software]*. 2013. URL: <https://pypi.python.org/pypi/radontea/>.
- [9] T. Hetkämper, L. Claes und B. Henning. „Vorzeichenrichtige tomographische Rekonstruktion von Ultraschallfeldern mit Hilfe der Schlierentechnik“. In: *tm - Technisches Messen* 90.s1 (2023), S. 49–54. DOI: 10.1515/teme-2023-0069.
- [10] J. L. Schönberger und J.-M. Frahm. „Structure-from-Motion Revisited“. In: *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2016.
- [11] E. Nikolakakis, U. Gupta, J. Vengosh, J. Bui und R. Marinescu. *GaSpCT: Gaussian Splatting for Novel CT Projection View Synthesis*. 2024. arXiv: 2404.03126 [eess.IV].
- [12] Y. Li, X. Fu, S. Zhao, R. Jin und S. K. Zhou. *Sparse-view CT Reconstruction with 3D Gaussian Volumetric Representation*. 2023. arXiv: 2312.15676 [eess.IV].
- [13] G. Wu, T. Yi u. a. „4D Gaussian Splatting for Real-Time Dynamic Scene Rendering“. In: *arXiv preprint arXiv:2310.08528* (2023).