

HERRMANN, Janine; HOFFMANN, Max & WESSEL, Lena  
Paderborn

## **Verstehen adressieren und Darstellungen vernetzen: Exemplarische Aufgaben zur analytischen Geometrie**

### **1. Ausgangslage**

Die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife spezifizieren sechs allgemeine mathematische Kompetenzen die „von den Lernenden nur in der aktiven Auseinandersetzung mit Fachinhalten erworben“ (KMK, 2012, S. 12) werden können. Verschiedene mathematikdidaktische Beiträge konstatieren für den gegenwärtigen Unterricht zur analytischen Geometrie allerdings im Sinne der Kompetenz K5 („mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (KMK, 2012, S.12)) eine starke Orientierung am Kalkül (z. B. Borneleit et al., 2001, S. 78-79; Henn & Filler, 2015, S. 3; Frohn & Salle, 2020, S. 32). Dies birgt die Gefahr, dass man im Mathematikunterricht der folgenden, zentralen Idee nicht genügend gerecht wird:

„Die der Analytischen Geometrie zugrundeliegende Idee ist es, mit Hilfe von Koordinaten und Vektoren geometrische Sachverhalte algebraisch zu beschreiben und umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu interpretieren“ (Tietze et al., 2000, S. 2).

Das Verwenden mathematischer Darstellungen (allgemeine mathematische Kompetenz K4) ist demzufolge für das Lehren und Lernen von analytischer Geometrie von besonderer Bedeutung. Dabei erweisen sich die im obigen Zitat adressierten zentralen Strategien des Geometrisierens und Algebraisierens, wenn sie von Lernenden aktiv und selbstständig genutzt werden können, als Heuristiken, die auch über den konkreten Inhalt hinaus zur Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen beitragen (Vohns, 2016, S. 4).

Im Sinne des *Constructive Alignments* (Biggs & Tan, 2011; Barzel & Leuders, 2021) ist eine notwendige Bedingung für gelingenden Kompetenzerwerb, dass Lernziele, Unterricht und (zentrale) Prüfungen im Einklang miteinander stehen. So nehmen einerseits Prüfungsaufgaben (insb. zentral gestellte, wie Abiturprüfungen) einen zentralen Einfluss auf den Unterricht, umgekehrt ergeben sich gute Prüfungsaufgaben aus einem qualitätsvollen Unterricht mit geeigneten Lernzielen. In diesem Beitrag wollen wir im Bereich der analytischen Geometrie Beziehungen zwischen Qualitätsmerkmalen von Unterricht, Aufgaben und Prüfungen exemplarisch an zwei Aufgaben diskutieren. Zunächst behandeln wir ausführlich eine Aufgabe zum Inhalt *Skalarprodukt* und anschließend geben wir als zweites

kürzeres Beispiel einen Einblick in eine Aufgabe zum Inhalt *Spiegeln*. Anhand dieser Aufgabenbeispiele diskutieren wir einen produktiven Umgang mit verschiedenen Darstellungen im Unterricht und daraus resultierende Implikationen für Prüfungsaufgaben. Unser Anliegen ist es aufzuzeigen, wie tiefgehendes Verständnis im Unterricht gefördert und schließlich auch in Prüfungen adressiert werden kann. Dabei erweisen sich spezifische kognitiv aktivierende Heuristiken im Umgang mit und bei der Vernetzung von Darstellungen als zentraler Ausgangspunkt, um qualitätsvollen analytischen Geometrieunterricht zu beschreiben.

Dieser Beitrag verfolgt zur Bearbeitung dieses zentralen Anliegens folgende Struktur: Zunächst entwickeln wir in Abschnitt 2 bestehende Theorie zu Darstellungen im Kontext der analytischen Geometrie weiter und bündeln diese in einem vektorzentrierten Darstellungsmodell. In Abschnitt 3 stellen wir schließlich eine Aufgabe zum Skalarprodukt und in Abschnitt 4 eine Aufgabe zum Spiegeln an Ebenen vor. Dabei nutzen wir das Darstellungsmodell in beiden Abschnitten mit zwei unterschiedlichen Funktionen: (1) Zur Abbildung möglicher Lernprozesse sowie (2) Zur Rekonstruktion des Potenzials der Aufgaben für den Unterricht und für Prüfungen. Abschließend fassen wir die Erkenntnisse aus unseren Analysen in Abschnitt 5 zusammen und formulieren Implikationen für qualitätsvollen analytischen Geometrieunterricht und die Gestaltung zugehöriger Prüfungen.

## **2. Qualitätsvoller Unterricht und Darstellungsvernetzung zur analytischen Geometrie**

Unterricht zur analytischen Geometrie, in dem Algebraisieren und Geometrisieren einen zentralen und expliziten Stellenwert haben, befasst sich zwangsläufig damit, algebraische und geometrische Darstellungen miteinander in Zusammenhang zu bringen. Während das Algebraisieren das Darstellen von geometrischen Objekten und Konfigurationen mithilfe algebraischer Objekte beschreibt, meint die Geometrisierung andersherum die geometrische Interpretation algebraischer Objekte (Vohns, 2016, S. 4; siehe auch Tietze et al., 2000, S. 60). Im Sinne des Prinzips der Verstehensorientierung (z. B. Holzäpfel et al., 2024) ist es wichtig, verschiedene Darstellungen im Unterricht nicht nur zu adressieren, sondern auch miteinander zu vernetzen. Dabei geht das Vernetzen von Darstellungen insofern über das algorithmisch eintrainierte Umwandeln von Darstellungen hinaus, dass Zusammenhänge von Darstellungen expliziert und begründet werden, sowie in Problemlöseprozessen als Heuristiken verwendet werden. Möchte man beispielsweise im Unterricht eine Koordinatengleichung der Ebene der Form  $E: ax + by + cz = d$  mit einer passenden

Parameterdarstellung der Form  $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$  vernetzen, ist das algorithmische Überführen ineinander für Lernende womöglich ein unverstandenes Verfahren. Erst wenn Lernende erklären können, weshalb beide Gleichungen dasselbe Objekt beschreiben, lässt sich Verständnis diagnostizieren.

Konkret unterscheiden sich die beiden oben genannten Darstellungen der Ebene strukturell in Bezug auf das Vorhandensein von Vektoren. Weil die Koordinatengleichung nur aus Skalaren und deren Verknüpfung miteinander besteht, nennen wir sie eine *skalar-algebraische* Darstellung. Die Parameterform, die Vektoren einbezieht, ist dahingegen ein Beispiel für eine *vektoriell-algebraische* Darstellung. Beide algebraischen Darstellungen lassen sich auf unterschiedliche Weise geometrisieren:

Um die skalar-algebraische Koordinatengleichung zu geometrisieren, lassen sich zunächst verschiedene Punkte ablesen, die die Gleichung erfüllen. Zeichnet man ausreichend viele solcher Punkte in ein gegebenes Koordinatensystem ein (z. B. mithilfe einer digitalen Geometriesoftware), lässt sich daraus eine Ebene abstrahieren. Ist bereits bekannt, dass die skalar-algebraische Darstellung eine Ebene symbolisiert, genügen drei Punkte, um die Ebene eindeutig darstellen zu können. Eine so resultierende Darstellung der Ebene bezeichnen wir als *elementar-geometrisch*.

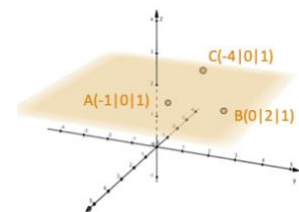


Abbildung 1:  
Elementar-  
geometrische  
Darstellung einer

Möchte man die vektoriell-algebraische Parameterdarstellung geometrisch deuten, liegt es nahe, die in der Gleichung gegebenen Vektoren als Pfeile einzuzichnen. Die Addition der Vektoren lässt sich dabei als Verkettung der zugehörigen Pfeile verstehen. Startet man im Ursprung und verkettet die drei zu den Vektoren gehörigen Pfeile in einer beliebigen Reihenfolge miteinander, lassen sich wiederum Punkte auf der Ebene identifizieren. Um tatsächlich alle Punkte zu erreichen, ist das skalare Multiplizieren der sogenannten Richtungsvektoren geometrisch als Längenvariation dieser Pfeile zu interpretieren. Die auf diese Weise durch die Zuhilfenahme von Pfeilen erarbeitete geometrische Darstellung der Ebene nennen wir dann *pfeilgeometrisch*.

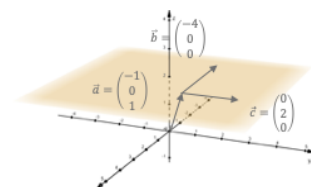


Abbildung 2:  
Pfeilgeometrische  
Darstellung einer Ebene

Ein umfassendes Verständnis einer Ebene wird dann durch explizites Vernetzen dieser Darstellungen miteinander gekennzeichnet. In unserem

vektorzentrierten<sup>5</sup> Darstellungsmodell (Abb. 3) finden sich verallgemeinernd für verschiedene Inhalte der analytischen Geometrie nicht nur die oben skizzierten Darstellungsformen (in beige und blauen Kästen), sondern auch zugehörige Vernetzungsprozesse.

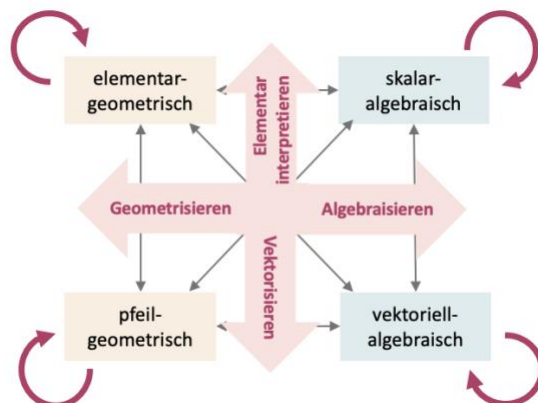


Abbildung 3: Vektorzentriertes Modell der Darstellungsvernetzung in der analytischen Geometrie. Die selbstreferenziellen, dunkelroten Pfeile beschreiben die Arbeit innerhalb einer Darstellungsform, wohingegen die grauen Pfeile das Wechseln zwischen zwei Darstellungen beschreiben. Die hellroten, dicken Pfeile (Algebraisieren, ...) verdeutlichen prototypische Prozesse für explizite Darstellungsvernetzung.

Darstellungsvernetzungsprozesse zwischen geometrischen und algebraischen Darstellungen bezeichnen wir der Literatur folgend als *Geometrisieren* und *Algebraisieren*. Im Modell tauchen diese Prozesse im horizontalen hellroten Doppelpfeil auf. Der vertikale hellrote Doppelpfeil beschreibt Darstellungsvernetzung zwischen vektorisierten Darstellungen (siehe oben) und nicht vektorisierten Darstellungen. Letztere Vernetzungsprozesse sind für die *vektorielle* analytische Geometrie, wie sie heutzutage in den Curricula vieler Bundesländer verankert ist, zentral und leiten sich aus Malles (2005, S. 6) Vorschlag ab, Vektoren nicht nur als *Rechen-*, sondern vor allem auch als *Darstellungsmittel* fruchtbar für verstehensorientierten Unterricht zu nutzen. Dies gilt sowohl für geometrische Darstellungen (Pfeile) als auch für algebraische Darstellungen (n-Tupel oder gekapselte Zeichen wie „ $\vec{a}$ “). Das geometrische Einzeichnen von Pfeilen, bzw. das algebraische Strukturieren skalar-algebraischer Darstellungen mithilfe von Vektoren (als n-Tupel) bezeichnen wir als *Vektorisieren*. Andersherum sprechen wir vom *elementaren Interpretieren*.

<sup>5</sup> Mit „vektorzentriert“ meinen wir hier, dass das Darstellungsmodell vektorbasierte und nicht-vektorbasierte Darstellungen voneinander unterscheidet. Während Lernende mit nicht-vektorbasierten Darstellungen bereits aus der Sekundarstufe I vertraut sind, werden vektorbasierte Darstellungen in der Regel erst in der Sekundarstufe II eingeführt. Der Übersichtlichkeit des Modells halber fassen wir insbesondere unter dem Begriff „skalar-algebraisch“ verschiedene Darstellungen zusammen, die unter einem anderen didaktischen Schwerpunkt weiter unterschieden werden können, z. B. Darstellungen durch Funktionsterme, lineare Gleichungen, Ortsliniengleichungen.

Die damit verbundenen konkreten Aktivitäten unterscheiden sich deutlich auf geometrischer und algebraischer Seite. Der Übersichtlichkeit halber nutzen wir hier aber auf beiden Seiten dieselben Begriffe, um die grundsätzliche Idee des Wechselns und Vernetzens zwischen Darstellungen mit und ohne Vektoren zu betonen.

In den folgenden Abschnitten stellen wir zwei konkrete Aufgaben vor, in denen jeweils Verstehensorientierung und Darstellungsvernetzung besonders im Fokus stehen. Für beide Aufgaben beschreiben wir, wie das Modell aus Abbildung 3 bei der Aufgabenkonzeption und zur Analyse zugehöriger Bearbeitungswege genutzt werden kann. Dafür können zwei unterschiedliche Perspektiven auf das Modell herangezogen werden:

1. *Fokus auf die Arbeit innerhalb der vier Darstellungsformen* (selbstreferenzielle dunkelrote Pfeile in Abb. 1): Innerhalb welcher der Darstellungsformen wird bei der Aufgabenbearbeitung zu welchem Anteil gearbeitet? Welche Darstellungsformen sind aus normativer oder deskriptiver Perspektive besonders produktiv für gegenstandsspezifisches, inhaltliches Verständnis?
2. *Fokus auf die Vernetzung der verschiedenen Darstellungen* (graue Pfeile zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen in Abb. 3): Welche Darstellungswechsel gibt es in einer Aufgabe? Welche Darstellungswechsel sollen durch eine zu konzipierende Aufgabe forciert werden?

Aus der Analyse der beiden Aufgaben ergeben sich jeweils Implikationen für qualitätsvolle Aufgaben zur Leistungsüberprüfung, die in Abschnitt 4 beschrieben werden.

### **3. Aufgabenbeispiel I: Gleiche Skalarprodukte finden**

#### **3.1. Kerngedanke und Aufgabenstellung**

Im Kontext des genuin algebraisch fundierten Konzepts Skalarprodukt ist das Wechselspiel von Algebra und Geometrie expliziter Bestandteil der gegenstandsbezogenen curricularen Vorgaben: In den Bildungsstandards (KMK, 2012, S. 19) wird das Skalarprodukt nicht nur zur rechnerischen Bestimmung von Streckenlängen und Winkelgrößen genutzt, sondern soll explizit auch geometrisch gedeutet werden.

In der unterrichtlichen Realität wird dem Spezialfall orthogonaler Vektoren bzw. der Überprüfung von Orthogonalität durch Prüfung der Gleichung  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  häufig besondere Aufmerksamkeit geschenkt (Herrmann & Wessel, 2025a). Dieser Zusammenhang lässt sich durch folgenden Satz geometrisch

beleuchten: Zwei Vektoren haben das Skalarprodukt 0, genau dann, wenn alle zugehörigen Pfeile im geometrischen Sinne paarweise zueinander orthogonal stehen.

Zu einem tiefgehenden Verständnis und einer umfassenden geometrischen Deutung gehört aber gerade auch die Betrachtung von Skalarprodukten ungleich Null. Aufgrund der Abhängigkeit des Skalarprodukts von Länge und eingeschlossenem Winkel der beteiligten Vektoren ist die Situation hier komplexer. Das Verstehen der geometrischen Bedeutung von z. B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,4$  erfordert ein Zusammenspiel verschiedener Verstehens-elemente wie es sich in den folgenden drei Zusammenhängen zeigt.

- Stellt man keine weiteren Voraussetzungen an die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , lässt sich eine qualitative Aussage über den Winkel treffen. Dazu kann man den Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen des Skalarproduktes mit der Art des von den zugehörigen Pfeilen eingeschlossenen Winkels ausnutzen: Wegen  $0,4 > 0$  erkennt man, dass der Winkel zwischen zwei zugehörigen Pfeilen ein spitzer Winkel sein muss.
- Fordert man, dass die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  normiert sind, entspricht das Skalarprodukt genau dem Kosinus des Winkels zwischen zwei zu den Vektoren gehörenden Pfeilen. Diese Annahme lässt sich nur für Skalarprodukte mit Werten in  $[-1,1]$  treffen.
- Kennt man einen der beiden Vektoren, z. B.  $\vec{a}$ , oder betrachtet die Situation für ein beliebiges, aber festes  $\vec{a}$ , gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Wahl von  $\vec{b}$ , sodass die Gleichung erfüllt ist. Diese lassen sich geometrisch charakterisieren: Wählt man zur geometrischen Darstellung von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  Pfeile mit gemeinsamem Ursprung, entsprechen die Spitzen aller Pfeile möglicher Kandidaten für  $\vec{b}$  einer zu  $\vec{a}$  senkrechten Gerade (in der Ebene) bzw. einer zu  $\vec{a}$  senkrechten Ebene (im Raum).

Zusammenhang 3 wirkt auf den ersten Blick etwas sperrig, ist aber die zentrale geometrische Deutung zur Gleichheit zweier Skalarprodukte, die beispielsweise zum Verständnis der Abstandsberechnung Punkt-Ebene zwingend erforderlich ist<sup>6</sup>. Sie steht im Zentrum der nachfolgend

---

<sup>6</sup> Ist  $P$  ein Punkt und  $E$  eine Ebene durch den Punkt  $A$  mit Normalenvektor  $\vec{n}$ , dann kann man den Abstand von  $P$  zu  $E$  über den Term  $\frac{|(\vec{OP}-\vec{OA}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$  berechnen. Durch die im Text beschriebene geometrische Deutung erkennt man, dass das Skalarprodukt im Zähler dem Skalarprodukt des zu  $\vec{n}$  linear abhängigen

vorgestellten Aufgabe „Gleiche Skalarprodukte“, die sowohl als Lern- oder auch als Prüfungsaufgabe geeignet ist (aus Herrmann et al., 2024). Wir nutzen sie in diesem Abschnitt in einem Lernsetting.

### Gleiche Skalarprodukte

In der nebenstehenden Abbildung ist der Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  durch einen Pfeil dargestellt.

- a) Zeichne drei Pfeile mit unterschiedlichen Richtungen ein, die jeweils dasselbe Skalarprodukt mit  $\vec{v}$  haben.
- b) Begründe, weshalb deine gewählten Pfeile dasselbe Skalarprodukt haben.

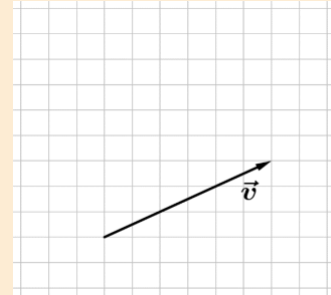


Abbildung 4: Aufgabe "Gleiche Skalarprodukte"

Eine naive Herangehensweise, bei der lediglich zu  $\vec{v}$  senkrechte Pfeile eingezeichnet werden, die bekanntermaßen allesamt das Skalarprodukt 0 haben, wird hier ausgeschlossen, da sich auf diese Weise nicht drei Pfeile mit unterschiedlicher Richtung finden lassen. Nachfolgend werden unterschiedliche Bearbeitungswege zur Aufgabe dargestellt, aus fachlicher Perspektive beleuchtet und anschließend in unserem vektorzentrierten Darstellungsmodell eingeordnet.

### 3.2. Verschiedene authentische und potenziell mögliche Bearbeitungswege zur Aufgabe und dafür notwendige Verstehensgrundlagen

In diesem Absatz beschreiben wir unterschiedliche Bearbeitungen und Bearbeitungsmöglichkeiten zur Aufgabe „Gleiche Skalarprodukte“. Uns liegen dabei videographierte Daten von Lehrkräften vor, die die Aufgaben bearbeitet haben und ihre Lösung innerhalb einer Kleingruppe berichteten. Die Aufgabe hatte für die Lehrkräfte einen Neuwert, weshalb die Zugänge zur Aufgabe ein authentisches Problemlöseszenario abbilden, was sich ähnlich auch auf Lernende übertragen ließe.

Wir stellen zunächst die beiden Bearbeitungswege der aus diesem Datensatz stammenden Lehrkräfte Andreas und Dunja dar und bereichern diese durch fachliche Überlegungen an. In C und D stellen wir darüber hinaus weitere mögliche Bearbeitungsmöglichkeiten der Aufgabe dar, die sich in unseren Daten nur im Ansatz oder kaum zeigen. Sie ergänzen die empirisch fokussierten Bearbeitungswege von Andreas und Dunja und untermauern die

---

Vektors von A zur orthogonalen Projektion auf die Ebene entspricht. Dessen Länge ist genau der gesuchte Abstand.

reichhaltige Lösungsvielfalt der Aufgabe, sowie die Möglichkeiten zur tiefgehenden, inhaltlichen Auseinandersetzung mit dem Skalarprodukt.

(A) Andreas' Bearbeitung über geometrisches Verständnis zu Projektionen

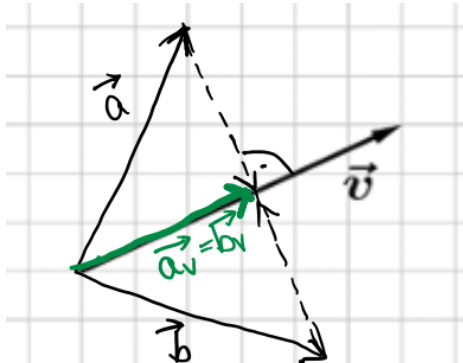


Abbildung 5: Andreas Skizze zur Bearbeitung der Aufgabe „Gleiche Skalarprodukte“

Andreas greift bei der Bearbeitung der Aufgabe auf sein Wissen zum Zusammenhang des Skalarproduktes mit Projektionen zurück. Er zeichnet in die gegebene Skizze zunächst einen Pfeil  $\vec{a}$  ein und skizziert dann die orthogonale Projektion auf  $\vec{v}$ . Dann zeichnet er einen weiteren Pfeil  $\vec{b}$  und dessen Projektion auf  $\vec{v}$  ein und abstrahiert seine Überlegungen mündlich auf weitere Pfeile mit derselben Projektion: „Jeder dieser Vektoren hier, der projiziert ja die gleiche Länge auf  $\vec{v}$ .“

Andreas geht fälschlicherweise davon aus, dass das Skalarprodukt der Länge der Projektion entspricht, weshalb seine Argumentation zu gleichen Skalarprodukten hier nicht korrekt und etwas voreilig ist. Die Aufgabe kann er trotz der Fehlvorstellung mit seinem Ansatz zur Projektion korrekt lösen.

Wir möchten diesen Bearbeitungsweg im Folgenden aufbauend auf Andreas Ansatz fachlich korrigieren und durch mathematische Begründungen anreichern. Um zu begründen, weshalb Andreas eingezeichneter Pfeil des Vektors  $\vec{b}$  dasselbe Skalarprodukt mit  $\vec{v}$  hat wie  $\vec{a}$  ziehen wir seine Skizze heran. Denkt man sich ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete  $\overrightarrow{a_v}$  und der Hypothense  $\vec{a}$  in die Skizze hinein, so lässt sich über  $\cos(\alpha) \cdot |\vec{a}|$  die orientierte Länge der orthogonalen Projektion von  $\vec{a}$  auf die durch den gemeinsamen Pfeilursprung und  $\vec{v}$  festgelegte Gerade beschreiben. Das durch  $\cos(\alpha)$  festgelegte Vorzeichen ist genau dann positiv, wenn die Orientierungen der Projektion von  $\vec{a}$  und  $\vec{v}$  übereinstimmen (spitzer Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{v}$ ) und sonst negativ (stumpfer Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{v}$ ).

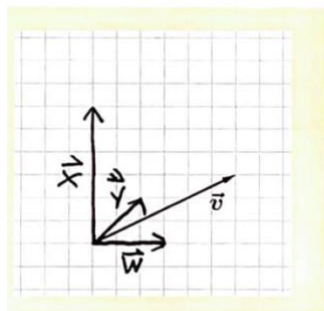
Dass die Skalarprodukte  $\vec{a} \cdot \vec{v}$  und  $\vec{b} \cdot \vec{v}$  tatsächlich genau dann gleich sind, wenn die orthogonalen Projektionen  $\overrightarrow{a_v}$  und  $\overrightarrow{b_v}$  gleich sind, lässt sich unter Rückgriff auf Andreas' Skizze auch allgemeingültig begründen:

Sind  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$  Vektoren mit  $\overrightarrow{a_v} = \overrightarrow{b_v}$  und  $\vec{v} \neq 0$ , gilt  $|\overrightarrow{a_v}| = |\overrightarrow{b_v}|$ . Außerdem sind  $\overrightarrow{a_v}, \overrightarrow{b_v}$  dann gleich orientiert (\*). Für  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$  gilt also:  $\frac{|\overrightarrow{a_v}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| =$

$\frac{|\vec{b}_v|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{v}|$ . Wegen  $(\star)$  folgt dann  $\cos(\alpha) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| = \cos(\beta) \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{v}|$  und damit die Gleichheit der Skalarprodukte  $\vec{a} \cdot \vec{v}$  und  $\vec{b} \cdot \vec{v}$ .

Für die andere Richtung seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$  ( $\vec{v} \neq 0$ ) Vektoren mit  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$ . Wieder folgt aus der Kosinus-Termdarstellung mit der umgekehrten Rechnung wie oben  $|\vec{a}_v| = |\vec{b}_v|$ . Da nach Definition der orthogonalen Projektion zusätzlich  $\vec{v}$  und sowohl  $\vec{a}_v$  als auch  $\vec{b}_v$  linear abhängig sind, muss  $\vec{a}_v = \pm \vec{b}_v$  sein. Wäre  $\vec{a}_v = -\vec{b}_v$ , könnten  $\alpha$  und  $\beta$  nicht beide gleichzeitig spitz oder stumpf sein. Dann haben aber  $\cos(\alpha)$  und  $\cos(\beta)$  unterschiedliche Vorzeichen, woraus wegen  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  und  $|\vec{v}| > 0$  aus der Kosinus-Termdarstellung  $\vec{a} \cdot \vec{v} = -(\vec{b} \cdot \vec{v})$  folgt (im Widerspruch zur Annahme).

(B) Dunjas Bearbeitung über Koordinatisierung und Algebraisierung des Pfeils



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{w} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \vec{y} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dunja identifiziert den gegebenen Pfeil mit dem Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Da der Wert der Skalarprodukte nicht vorgegeben ist, setzt Dunja ihn auf 18 fest und ermittelt dann mithilfe der arithmetischen Termdarstellung  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$  Vektoren mit diesem Skalarprodukt mit  $\vec{v}$ , zum Beispiel:  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ...

Abbildung 6: Dunjas Bearbeitung zur Aufgabe "Gleiche Skalarprodukte"

Dunjas Aufgabenbearbeitung stellt eine Möglichkeit dar, die Aufgabe auch ohne ein geometrisches Verständnis gleicher Skalarprodukte zu lösen. Dunja koordinatisiert zunächst den gegebenen Pfeil  $\vec{v}$ , indem sie anhand des Gitters Koordinaten ermittelt, mit denen sie den Vektor als n-Tupel darstellen kann. Der Vektor ist dabei für Dunja ein „Bindeglied zwischen Geometrie und Algebra“ (Henn & Filler, 2015, S. 149). Im Anschluss an die Algebraisierung ermittelt Dunja systematisch weitere n-Tupel, deren Skalarprodukte sich schnell im Kopf ausrechnen lassen und alle den Wert 18 haben. Dunja zeichnet schließlich die gefundenen n-Tupel als Pfeile mit gleichem Ursprung wie  $\vec{v}$  in die gegebene Skizze ein. Sie erkennt dabei allerdings nicht den geometrischen Zusammenhang der gleichen Skalarprodukte.

Neben Andreas' und Dunjas Bearbeitungen sollen hier noch zwei weitere mögliche Bearbeitungsansätze zur Aufgabe dargestellt werden:

*(C) Bearbeitung über geometrisches Verständnis zu Zerlegungen und algebraische Distributivität*

Der folgende geometrische Lösungsansatz kommt auch ohne das Verständnis von Projektionen im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt bzw. ohne die Kosinus-Termdarstellung aus. Die Idee ist, den zu  $\vec{a}$  gehörigen Pfeil bezüglich  $\vec{v}$  in einen parallelen Teil  $\vec{a}_{\parallel}$  und einen orthogonalen Teil  $\vec{a}_{\perp}$  zu zerlegen. Dieser geometrische Ansatz kann dann produktiv genutzt werden, wenn er algebraisch mit der Distributivität des Skalarproduktes vernetzt wird:

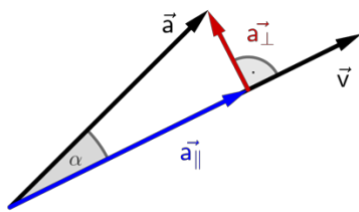


Abbildung 7: Planskizze zur Bearbeitung über Zerlegungen und

Der Vektor  $\vec{a}$  lässt sich in der nebenstehenden Zeichnung durch den Vektorzug  $\vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$  beschreiben. Mit der Distributivität des Skalarproduktes gilt also:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (\vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}) \cdot \vec{v} = \vec{a}_{\parallel} \cdot \vec{v} + \vec{a}_{\perp} \cdot \vec{v}$$

Weil  $\vec{v}$  und  $\vec{a}_{\perp}$  orthogonal zueinander sind, verschwindet das zweite Produkt in der Summe und es folgt, dass das Skalarprodukt nur vom zu  $\vec{v}$  parallelen Teil  $\vec{a}_{\parallel}$  abhängt. Es gilt  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a}_{\parallel} \cdot \vec{v}$ .

Dementsprechend haben alle Vektoren, die bei orthogonaler Zerlegung bezüglich  $\vec{v}$  denselben parallelen Teil haben, dasselbe Skalarprodukt mit  $\vec{v}$  und umgekehrt.

*(D) Bearbeitung über ein geometrisches Verständnis zum Differenzvektor*

Folgender Bearbeitungsweg, für den ebenfalls geometrisches Verständnis zum Skalarprodukt notwendig ist, greift auf das Distributivgesetz zurück und startet algebraisch vom Ziel her:

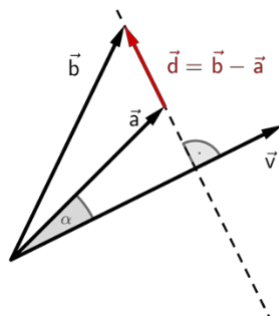


Abbildung 8: Planskizze zur Bearbeitung über den Differenzvektor

Gesucht ist ein Vektor  $\vec{b}$  mit  $\vec{b} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{v}$ . Wenn die Skalarprodukte von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit  $\vec{v}$  gleich sein sollen, dann muss gelten:  $\vec{b} \cdot \vec{v} - \vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{v} = 0$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Differenzpfeil von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zu  $\vec{v}$  sein muss. Mithilfe solcher orthogonaler Differenzpfeile lassen sich beliebig viele weitere Pfeile konstruieren, deren Vektoren dasselbe Skalarprodukt mit  $\vec{v}$  haben.

### 3.3. Potenzial der Aufgabe für Unterricht und Prüfungen

Die dargestellte Aufgabe bietet wie in 3.2 dargestellt vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten, für die jeweils ein naives Verständnis des Skalarproduktes nicht ausreicht. Sowohl die gegebene Situation (ein Pfeil) als auch die geforderte Antwort sind geometrischer Natur. Dadurch, dass das Skalarprodukt selbst aber algebraisch definiert ist, beinhaltet jede der Bearbeitungen automatisch Prozesse des Geometrisierens und Algebraisierens. Inwiefern die Aufgabe dabei insbesondere Potenzial hat, geometrisches Verständnis zum Skalarprodukt zu adressieren, was zwar durch den Lehrplan gefordert, aber im realen Unterricht häufig zu kurz kommt, kann mithilfe des Darstellungsmodells konkretisiert werden. Dabei nutzen wir das Modell mit einem Fokus auf die Arbeit innerhalb der vier Darstellungsformen und möchten herausarbeiten, welche Schwerpunkte innerhalb der Aufgabenbearbeitungen gesetzt werden (vgl. Perspektive 1, Abschnitt 2).

Die beiden folgenden Diagramme in Tabelle 1 kontrastieren die Bearbeitungswege von Andreas und Dunja. Die Aufgabe war beiden zuvor nicht bekannt und stellte aufgrund des unbekannten Lösungsweges ein neues mathematisches Problem dar. Anhand der berichteten Aufgabenlösung kann abgeschätzt werden, zu welchem Anteil sie jeweils in welcher Darstellungsform gearbeitet haben. Die Abbildung illustriert berichtete Schwerpunkte bei den Aufgabenbearbeitungen von Andreas und Dunja; die Punktstärken sind qualitativ zu interpretieren und nicht als exakt quantifizierbare Anteile.

Tabelle 1: Schwerpunktmäßig adressierte Darstellungsformen bei Andreas und Dunja

| Schwerpunkte in Andreas' Bearbeitung | Schwerpunkte in Dunjas Bearbeitung |
|--------------------------------------|------------------------------------|
|                                      |                                    |

Während Andreas im Zuge seiner Bearbeitung stark geometrisch arbeitet und Wissen zum Zusammenhang von Projektionen und dem Skalarprodukt aktiviert, löst Dunja das geometrisch gegebene Problem allein mit algebraischen Methoden. Die Koordinaten des so ermittelten n-Tupels sowie

die arithmetische Formel des Skalarproduktes erlauben ihr ein algebraisches Arbeiten mit skalaren Größen ohne Vektoren, bei dem sie die Koordinaten weiterer  $n$ -Tupel durch Rechnungen ermittelt. Zwar gelingt es ihr auf diese Weise, algebraisch produktiv zu arbeiten, allerdings verliert sie durch den Fokus auf die Koordinaten das geometrische Problem aus den Augen. Ihr gelingt es folglich nicht, verallgemeinerbare geometrische Einsichten über die Lage aller möglichen Pfeile zu formulieren.

Andreas arbeitet dahingegen weniger prozedural daran, gleiche Skalarprodukte systematisch zu ermitteln, sondern er aktiviert durch pfeilgeometrische Darstellungen vor allem konzeptuelle Verstehenselemente (siehe Abschnitt 3.1). Dabei stellt er Bezüge zur Projektion und den Längen und Winkeln der zu den gesuchten Vektoren gehörenden Pfeile her und kann das Problem so geometrisch lösen. Eine algebraische Begründung führt er allerdings nicht an.

Die beiden Bearbeitungsbeispiele zeigen, dass sich die Aufgabe an verschiedenen Stellen im Unterrichtsverlauf zum Skalarprodukt einsetzen lässt. Ihr Einsatz ist davon abhängig, welche Bearbeitung erwartet werden kann und welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen schwerpunktmäßig adressiert werden sollen.

Wird die Aufgabe relativ früh eingesetzt und ist zu diesem Zeitpunkt die Kosinus-Term-Darstellung noch nicht eingeführt, so ist damit zu rechnen, dass die meisten Lernenden ausgehend von der arithmetischen Termdarstellung zunächst einen Lösungsansatz wie den von Dunja einschlagen werden. Die Bearbeitungen der gesamten Lerngruppe zusammengenommen bieten dann einen Anlass, um das dahinterliegende geometrische Phänomen (Pfeilspitzen liegen auf bzw. bilden sogar eine Orthogonale) zu entdecken. Dann kann eine Begründung dieser Beobachtung im Sinne von (C) oder (D) Teil der nächsten Unterrichtsphase sein. So eingesetzt wird besonders (K2) „Probleme mathematisch lösen“ und anschließend (K1) „Mathematisch argumentieren“ sowie ggf. (K6) „Mathematisch kommunizieren“ adressiert.

Ist die Kosinus-Termdarstellung schon bekannt, kann diese Aufgabe dazu dienen, die geometrische Bedeutung der Termstruktur mit Bezügen zur Trigonometrie der Sekundarstufe I (Prinzip der Durchgängigkeit) zu fokussieren. Auch hier spielt (K2) eine Rolle, der Fokus liegt aber stärker von vornherein auf (K1) (und (K6)).

Dabei hilft das Darstellungsmodell, wie oben dargestellt, die Bearbeitungswege von Lernenden innerhalb der Darstellungsformen zu verorten und so Bearbeitungsschwerpunkte zu identifizieren. Die

Anforderung an Lehrkräfte im Unterricht ist es dann, die (jeweils noch) vernachlässigten Darstellungsformen durch geschickte Impulse zu adressieren. Exemplarische Impulse zu den unterschiedlichen Vernetzungsprozesse finden sich auf dem Handout „Impulse zur Darstellungsvernetzung“ (siehe Anhang; aus Herrmann & Wessel, 2025b). Während im Fall von Dunja der Blick am Ende der Aufgabenbearbeitung auf das geometrische Phänomen gelenkt werden sollte, kann Andreas zu einer algebraischen Begründung seiner geometrischen Argumentation angeleitet werden.

Die Aufgabe birgt auch für Prüfungen Potenzial. Insofern die Aufgabe nicht bereits im Unterricht adressiert wurde, kann das Problemlösen fokussiert werden. Andernfalls kann die Aufgabe leicht verändert werden, ohne die aufgezeigten Potenziale zu verlieren.

- Möglichkeit 1: Einen Bearbeitungsweg forcieren, in dem ein möglicher Lösungsansatz (z. B. der Differenzvektor) bereits eingezeichnet ist. Es soll dann begründet werden, wie man darauf aufbauend die Gleichheit des Skalarprodukts begründen kann.
- Möglichkeit 2: Die Aufgabe wird umgekehrt. Es werden zusätzlich zu einem Pfeil zu  $\vec{v}$  noch zwei andere Pfeile gleichen Ursprungs eingezeichnet (ohne Koordinatensystem), deren Differenzvektor aber nicht orthogonal zu  $\vec{v}$  ist. Begründet werden soll dann, warum die beiden zugehörigen Vektoren mit  $\vec{v}$  nicht das gleiche Skalarprodukt haben können.

Durch solche oder ähnlich gelagerte Veränderungen ist es möglich, die Grundidee der Aufgabe sowohl im Unterricht als auch im Rahmen der Leistungsüberprüfung zu nutzen, um inhaltliches Verständnis zur geometrischen Deutung des Skalarproduktes sowie das Vernetzen von Geometrie und Algebra als zentrale Kompetenz der analytischen Geometrie zu adressieren bzw. zu prüfen.

## **4. Aufgabenbeispiel 2: Spiegelterme**

### **4.1. Kerngedanke und Aufgabenstellung**

Vektorielle Untersuchungen zum Spiegeln können in den Bildungsstandards der Kompetenz „geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren“ (Leitidee: Raum und Form (L3), KMK, 2012, S. 19) zugeordnet werden; in manchen Landescurricula wird das Thema sogar explizit erwähnt (z. B. MSB NRW, 2023, S. 25 ff.). Auch bei diesem Thema besteht die Gefahr, dass Lernende die mathematische Reichhaltigkeit auf eine – im ungünstigsten Fall auswendig gelernte – Formel reduzieren, mit

der die Spiegelung eines Punktes an einer Ebene vektoriell algebraisch ausgerechnet werden kann: Soll  $P \in \mathbb{R}^3$  an einer Ebene mit Normalenvektor  $\vec{n}$  und enthaltenem Punkt  $A \in \mathbb{R}^3$  gespiegelt werden, erhält man den Bildpunkt  $P'$  zum Beispiel mithilfe der Formel

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2 \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}.$$

Zunächst ist zu erwähnen, dass die Formel nur begrenzten Nutzen hat und vor allem bei der Grundaufgabe des Spiegelns eines Punktes hilft. Der Versuch, eine typische Umkehraufgabe wie das Finden einer zu einem Punktepaar passenden Spiegelebene über die Formel zu lösen, führt schnell zu ineffizienten und sehr technischen Lösungsansätzen. Darüber hinaus kann ein unreflektiertes Anwenden der Formel schnell zu Vorzeichen-, Einsetzungs-, oder sonstigen algebraischen oder numerischen Rechenfehlern führen. Das Einführen einer algebraischen Formel ohne den vorherigen Aufbau konzeptuellen Verständnisses kann dazu führen, dass Lernende weder verstehensorientiert damit umgehen noch Darstellungen geeignet vernetzen können (Prediger, 2009).

Konzeptuelles Verständnis zur Spiegelung in der Sekundarstufe II fußt stattdessen unter anderem auf den Konzepten Skalarprodukt und Lotfußpunkt. So ist ein Verstehenselement für das Verständnis der Spiegelungsformel, dass mithilfe des Skalarproduktes durch  $\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$  der Abstand von  $P$  zur Ebene beschrieben wird. Das Berechnen eines Vektors zwischen Punkt und Lotfußpunkt erscheint jedoch für das Verständnis der Kernidee der vektoriellen Darstellung des Spiegelns zweitrangig und ist ein wesentlicher, komplexitätsgenerierender Aspekt der obigen Formel. Um stattdessen Verstehensorientierung und Darstellungsvernetzung im Kontext des Spiegeln an Ebenen zu adressieren, bietet es sich an, auf einzelne Verstehenselemente (wie z. B. die Abstandsgleichheit vom Punkt und Bildpunkt zur Spiegelebene/-gerade oder die Orthogonalität der Punkt-Bildpunktgerade) zu fokussieren und durch geeignete Aufgabenstellungen das Vernetzen unterschiedlicher Darstellungen (insb. auch algebraischer und geometrischer) zu forcieren.

Diesem Gedanken folgend betrachtet die untenstehende Aufgabe (Hoffmann, 2025) zunächst die korrespondierende zweidimensionale Situation (die so ins Dreidimensionale übertragbar ist) und nutzt das Berechnen von Lotfußpunkten als Blackbox.

## Spiegelterme

$P$  ist ein Punkt im  $\mathbb{R}^2$ ,  $g$  eine Gerade und  $L$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $g$ . Mia und Hakim geben jeweils einen Term an, um den Spiegelpunkt  $P'$  zu bestimmen:

Mia:  $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$

Hakim:  $\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP}$

- Visualisiere beide Terme durch geeignete Skizzen mit Pfeilen.
- Begründe, dass durch beide Terme die Spiegelung korrekt beschrieben wird.

### 4.2. Verschiedene Bearbeitungswege

Eine mögliche Bearbeitung für Teil a) wird in der folgenden Abbildung dargestellt:

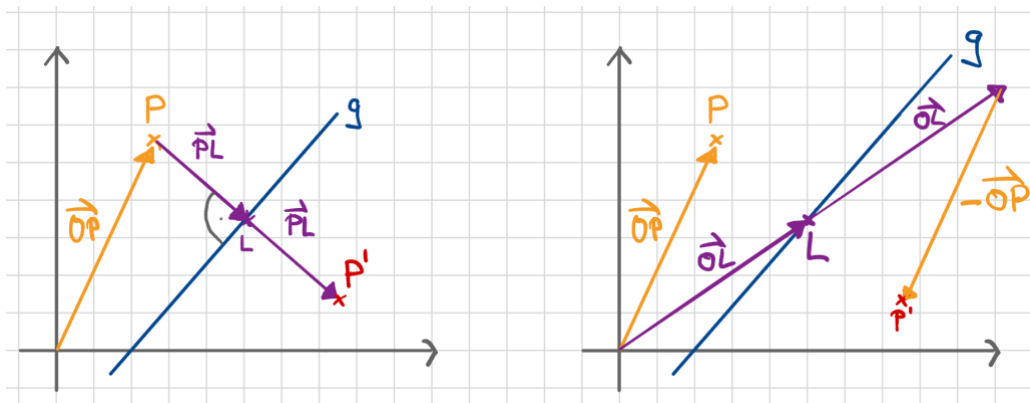


Abbildung 9: Bearbeitungsbeispiel für Teilaufgabe a) mit Mia links und Hakim rechts

Um für Teil b) zu begründen, dass durch beide Terme die Spiegelung korrekt beschrieben wird, gibt es zwei unterschiedliche Strategieansätze:

#### (A) Korrektheit beider Terme nachweisen

Man kann einerseits argumentieren, dass *beide* Terme die Spiegelung korrekt beschreiben: Mias Term beschreibt die Spiegelung korrekt, weil die Gerade durch  $P$  und  $P'$  senkrecht zu  $g$  steht (da sie durch den Lotfußpunkt  $L$  verläuft) und weil außerdem  $L$  der Mittelpunkt von  $P$  und  $P'$  ist (da die Vektoren von  $L$  zu  $P$  und  $P'$  Gegenvektoren, also gleich lang sind). Hakims Lösung beschreibt die Spiegelung korrekt, weil die Situation geometrisch als Parallelogramm aufgefasst werden kann und sich deswegen die Diagonalen halbieren. Dann muss außerdem der Lotfußpunkt  $L$  auf der Geraden durch  $P$  und  $P'$  liegen, die damit senkrecht zu  $g$  ist.

#### (B) Korrektheit eines Terms nachweisen und Gleichheit überprüfen

Andererseits genügt es auch nur zu begründen, dass einer der beiden Terme korrekt ist (siehe Begründung oben) und dann unter Verwendung des Zusammenhangs  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OL}$  die Umformungsgleichheit der beiden Terme nachzuweisen:

$$\overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP}.$$

### 4.3. Potenzial der Aufgabe für Unterricht und Prüfungen

Beim Vergleich der in 4.2 beschriebenen Lösungswege wird deutlich, dass in ganz unterschiedlicher Weise unterschiedliche Darstellungsformen miteinander vernetzt werden. Insbesondere bei der direkten Begründung der Korrektheit von Hakims Term finden nennenswerte elementargeometrische Überlegungen basierend auf Vorwissen zu besonderen Vierecken aus der Mittelstufe statt. Es ist allerdings stets erforderlich, die vektoriell-algebraischen Terme mit den zentralen (elementar)geometrischen Aspekten von Spiegelungen (Orthogonalität der Urbild-Bild-Gerade, Halbierung der Urbild-Bildgerade durch das Objekt, an dem gespiegelt wird) in Verbindung zu setzen. Die Aufgabe ist durch Teil a) so konzipiert, dass die explizite Nutzung pfeilgeometrischer Darstellungen dabei den wesentlichen Zwischenschritt darstellt.

Diese Designentscheidung bei der Aufgabenkonzeption kann mithilfe des Darstellungsmodells und dem Fokus auf das Vernetzen unterschiedlicher Darstellungsformen (vgl. Abschnitt 2, Perspektive 2) expliziert und eingeordnet werden. Soll ein vektoriell-algebraischer Term mit elementargeometrischen Vorkenntnissen zum Spiegeln in Zusammenhang gebracht werden, müssen die Darstellungen sowohl geometrisiert als auch elementar interpretiert werden. Die Aufforderung zum Erstellen pfeilgeometrischer Skizzen löst die Überlagerung beider Darstellungsvernetzungsprozesse auf (Abbildung 10).

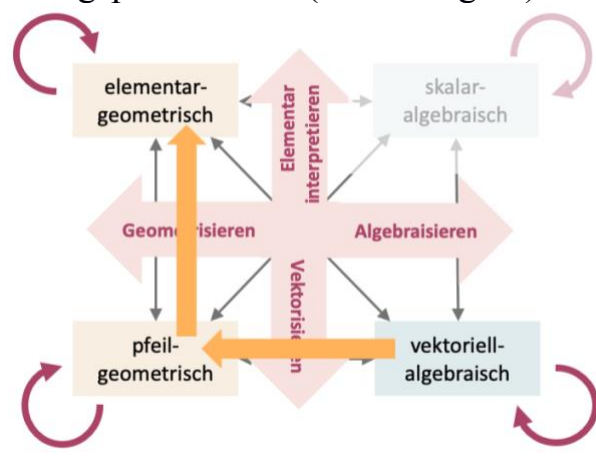


Abbildung 10: Darstellungsbezogenes Konstruktionsprinzip der Aufgabe „Spiegelterme“

Konkret sind die Terme von Mia und Hakim zunächst vektoriell-algebraische Darstellungen. Arbeitsauftrag a) adressiert die Vernetzung der algebraischen Termstrukturen mit pfeilgeometrischen Darstellungen (Geometrisieren). Die pfeilgeometrischen Darstellungen (vgl. Abbildung 3) müssen dann im Rahmen von Arbeitsauftrag b) elementargeometrisch interpretiert werden (vgl. Abschnitt 4.2 (A)/(B)). Wird Lösungsweg (B) genutzt, findet darüber hinaus für den Nachweis der Äquivalenz noch ein Arbeiten innerhalb der vektoriell-algebraischen Darstellungen statt (dunkelroter Pfeil).

Insgesamt bietet die Aufgabe für den Unterricht das Potenzial, reichhaltige Diskussionen zum Spiegeln unter Vernetzung unterschiedlicher Darstellungen und mit Rückgriff (im Sinne des Prinzips der Durchgängigkeit) auf passende geometrische Vorkenntnisse aus der Sekundarstufe I zu ermöglichen. Dabei wird bewusst der für viele Lernende häufig technisch anspruchsvolle Bereich des Ausrechnens von Lotfußpunkten beiseitegelassen, um zu verhindern, dass dabei auftretende Schwierigkeiten den Verständnisaufbau zu gespiegelten Situationen dominieren. Damit kann die Aufgabe dazu beitragen, durch explizite Darstellungsvernetzungsaktivitäten konzeptuelles Verständnis zum vektoriellen Spiegeln aufzubauen, das über das naive Nutzen der fertigen Formel hinausgeht.

Darüber hinaus eignet sich die Aufgabe auch als Vorbild / als Vorlage / als Anregung für die Konzeption von Prüfungsaufgaben. Wird das Erstellen pfeilgeometrischer Darstellungen zu einer vektoriell-algebraischen Situation explizit eingefordert, kann konzeptuelles Verständnis geprüft werden. Eine textuelle Erläuterung wesentlicher Aspekte der Vernetzung kann dies vertiefen. Bezogen auf das Beispiel der Spiegelungen können in der Aufgabe Terme variiert werden, um sowohl in Prüfungen als auch im Unterricht eingesetzt werden zu können. Für Prüfungen kann außerdem Teil b) konkretisiert werden, indem z. B. explizit gefordert wird, zunächst die Umformungsgleichheit nachzurechnen und dann die beiden oben beschriebenen zentralen Aspekte gespiegelter Situationen zu überprüfen. Alternativ wäre auch eine Umkehraufgabe vorstellbar, etwa der Bauart: „Gib begründet einen vektoriellen Term an, der zu der hier gezeichneten Pfeildarstellung passt“.

## **5. Abschluss und Diskussion**

Im Unterricht zur vektoriellen analytischen Geometrie liegt viel Potenzial für den Aufbau konzeptuellen Verständnisses in einem produktiven Umgang mit Darstellungen und einer verstehensorientierten Vernetzung derselben.

Prüfungen, insbesondere zentral gestellte, setzen bekanntermaßen die Maßstäbe für den Unterricht. Wird dort explizit das Vernetzen von Darstellungen eingefordert, rückt das für die vektorielle analytische Geometrie zentrale produktive Zusammenspiel geometrischer und algebraischer Darstellungen auch im Unterricht stärker in den Fokus.

Bezogen auf solch einen produktiven Umgang mit Darstellungen kann das vorgestellte Darstellungsvernetzungsmodell wie folgt einen Beitrag leisten: Auf *Lernprozessebene* kann es als Werkzeug dienen, um Bearbeitungsprozesse von Lernenden beim Arbeiten mit unterschiedlichen Darstellungen genauer ausdifferenzieren. Es kann sichtbar machen, welche Darstellungsformen die Lernenden nutzen, welche sie vernachlässigen und welche Formen für inhaltliches Verständnis besonders produktiv sind. Auf *Aufgabenebene* kann das Modell in der Aufgabenkonstruktion zur Fokussierung auf die Übergänge zwischen Darstellungsformen dienen. Mit dem Modell als Konstruktionswerkzeug können beispielsweise Aufgaben so gestaltet werden, dass Lernende gezielt zu expliziten Darstellungsvernetzungen angeregt werden, die konzeptuelles Verstehen fördern. Das Ziel ist dabei, Darstellungsvernetzung nicht nur als implizit notwendige Strategie zur erfolgreichen Aufgabenbearbeitung, sondern als expliziten Lerngegenstand zu sehen. Der Inhalt Skalarprodukt und die vorgeschlagene Aufgabe zu gleichen Skalarprodukten zeigt eine Möglichkeit auf, durch das verstehensorientierte Arbeiten mit Darstellungen unterschiedliche Bearbeitungswege anzubahnen, welche im Unterricht oder auch in Prüfungen besonderes Potenzial zur Berücksichtigung konzeptuellen Verständnisses liefern. Am Beispiel des Spiegels an Ebenen zeigt sich, wie Darstellungsvernetzungsprozesse explizit gemacht, gefördert und schließlich in Prüfungen abgebildet werden können.

In beiden Beispielen ist nicht nur das Zusammenspiel von Geometrie und Algebra für typische Arbeitsweisen im Bereich der analytischen Geometrie. Wir plädieren auch dafür, dem Konzept des Vektors sowie dem Vektorisieren elementargeometrische, bzw. skalar-algebraischer Darstellungen im Unterricht eine zentrale Bedeutung zuzumessen. So gelingt es nicht nur das Vektorkonzept zu plausibilisieren und für Lernende als Werkzeug in Problemlöseprozessen fruchtbar zu machen, sondern auch im Sinne der Durchgängigkeit (Holzäpfel et al., 2024, S. 6) neue Lerninhalte der Sekundarstufe II an geometrische oder algebraische Vorwissenselemente aus der Sekundarstufe I anzudocken und zu einem kohärenten Verstehensaufbau zu realisieren.

**Acknowledgement:** Vielen Dank an Bärbel Barzel und Leander Kempen für die kritische Durchsicht und die resultierenden instruktiven Kommentare.

**Förderung:** Die Entwicklung und Erforschung der vorgestellten Aufgaben findet im Rahmen und mit Unterstützung des von der Kultusministerkonferenz geförderten Projektes QuaMath statt.

## Literatur

- Barzel, B. & Leuders, T. (2021). „Learning to the test?“ – wissen, was man lernt. *mathematik lehren*, 225, 2–7.
- Biggs, J. & Tang, C. (2011). *Teaching for Quality Learning at University*. Open University Press.
- Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H. W. & Weigand, H. G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. *Journal Mathematik Didaktik*, 22(1), 73-90. <https://doi.org/10.1007/BF03339317>
- Frohn, D. & Salle, A. (2020). Wie finde ich den richtigen Abstand? Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, 223, 32-36.
- Henn, H. W. & Filler, A. (2015). *Didaktik der analytischen Geometrie und linearen Algebra*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2>
- Herrmann, J., Lomas, O., Hoffmann, M. & Wessel, L. (2024). *Ein verständiger Lernpfad zum Skalarprodukt - Grundkurs*. <https://quamath.de/node/10109>
- Herrmann, J. & Wessel, L. (2025a). Which categories do prospective teachers apply when selecting tasks for the scalar product. In: C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri & V. Randolph: Proceedings of the 48<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Research Reports, Vol. 1. PME. 387-394.
- Herrmann, J. & Wessel, L. (2025b). Fortbildung analytische Geometrie (QuaMath): Algebraisieren und Geometrisieren – Darstellungsvernetzung am Beispiel „Spiegeln“.
- Hoffmann, M. (2025). Lernpfad zum Spiegeln an Ebenen. <https://quamath.de/node/10108>
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B. & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *mathematik lehren*, 242, 2-9.
- KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).
- Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *mathematik lehren*, 133, 4–7.
- MSB NRW (2023). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. [https://lehrplannavigator.nrw.de/system/files/media/document/file/gost\\_klp\\_m\\_2023\\_06\\_07.pdf](https://lehrplannavigator.nrw.de/system/files/media/document/file/gost_klp_m_2023_06_07.pdf)
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül - Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 213-234). Beltz.
- Tietze, U., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematik in der Sekundarstufe II. Band 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg+Teubner. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6>

Vohns, A. (2016). Algebraisierung, Geometrisierung und Kapselung - Globale Ideen bei den Vektoren im Unterricht zur Analytischen Geometrie. *Der Mathematikunterricht*, 62(4), 4-14.

# DuEPublico

Duisburg-Essen Publications online

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN

*Offen im Denken*

ub

universitäts  
bibliothek

Dieser Text wird via DuEPublico, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Universität Duisburg-Essen, zur Verfügung gestellt. Die hier veröffentlichte Version der E-Publikation kann von einer eventuell ebenfalls veröffentlichten Verlagsversion abweichen.

**DOI:** 10.17185/duepublico/86712

**URN:** urn:nbn:de:hbz:465-20260713-133755-9



Dieses Werk kann unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 Lizenz (CC BY 4.0) genutzt werden.